

به نام خداوند جان و خرد

ریاضی عمومی (۱)



## ۱.۰ تمرین های اعداد مختلط

۱- اعداد مختلط زیر را به صورت  $a + ib$  ساده کنید :

$$\begin{array}{ll} ۱) \frac{1+i}{1-i} & ۳) \frac{2+i}{2-i} \\ ۲) (\sqrt{7} + \pi i)(\pi + i) & ۴) \pi \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{array}$$

۲- تساوی های زیر را ثابت کنید:

$$\begin{array}{ll} ۱) \operatorname{Re}(z^3) < \operatorname{Im}(z^3) & ۴) \frac{\sin 4\theta}{\sin \theta} = 2 \cos 3\theta + 6 \cos \theta - 4 \\ ۲) \left| \frac{(3-4i)(2+i)}{(2-4i)(6+8i)} \right| = \frac{1}{4} & ۵) |z| = 1 \Rightarrow \left| \frac{az+b}{bz+a} \right| = 1 \\ ۳) \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} & ۶) \frac{1+\sin \theta + i \cos \theta}{1+\sin \theta - i \cos \theta} = \sin \theta + i \cos \theta \end{array}$$

۳- معادلات زیر را به حل کنید:

$$\begin{array}{ll} ۱) z^6 = \frac{1+i}{1-i} & ۴) z^5 = -32 \\ ۲) z^3 = -1 + i & ۵) z^4 + i = 0 \\ ۳) z^4 = -1 & ۶) z^4 + 4z^2 + 16 = 0 \\ & ۷) z^5 = (2 - 2i)^3 \end{array}$$

۴- مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را بیابید که در روابط زیر صدق کنند:

$$\begin{array}{ll} ۱) 1 < |z| \leq 3 & ۳) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) > \frac{1}{4} \\ ۲) 1 \leq |z - i| \leq 3 & ۴) |z + i| = |z - 1| \\ & ۵) \operatorname{Re}(z - 5) = |z| + 5 \end{array}$$

۵- اعداد مختلط زیر را به صورت  $a + ib$  ساده کنید :

$$۱) i^۲۶ - ۳i^۷ + i^۶(۱ - i^۳) - (-i)^۱۸ \quad ۲) \frac{(\sqrt[۳]{۳}\sqrt{۳} + \sqrt[۳]{۳}i)^۶}{(\sqrt[۳]{۳} + i\sqrt[۳]{۳})^۳}$$

۶- تساوی های زیر را ثابت کنید:

$$۱) |z_۱ + z_۲|^۲ + |z_۱ - z_۲|^۲ = ۲(|z_۱|^۲ + |z_۲|^۲)$$

$$۲) ۱ + z + \dots + z^n = \frac{z^{n+۱} - ۱}{z - ۱}; \quad \forall z \neq ۱$$

$$۳) \sin \theta + \sin ۲\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin((n+۱)\frac{\theta}{۲})}{\sin \frac{\theta}{۲}} \cdot \sin(n\frac{\theta}{۲})$$

$$۴) ۱ + \cos \theta + \cos ۲\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{۱}{۲} + \frac{\sin((n+\frac{۱}{۲})\theta)}{۲ \sin \frac{\theta}{۲}}$$

$$۵) |z| < ۱ \Rightarrow |\text{Arg} \frac{۱+z}{۱-z}| < \frac{\pi}{۲}$$

$$۶) \cos ۸\theta + ۲۸ \cos ۴\theta + ۳۵ = ۶۴(\cos^۸ \theta + \sin^۸ \theta)$$

$$۷) \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{۲\pi}{n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(n-۱)\pi}{n} = \frac{n}{۲^{n-۱}}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{۱\}$$

$$۸) \left(\frac{۱+i \tan \alpha}{۱-i \tan \alpha}\right)^n = \frac{۱+i \tan n\alpha}{۱-i \tan n\alpha}; \quad n = ۰, ۱, ۲, \dots$$

$$۹) |z| = ۱ \Rightarrow z^{۲n} + z^{۲n-۲} + \dots + z^۲ + ۱ + z^{-۲} + z^{-۴} + \dots + z^{-۲n} = \frac{\sin((۲n+۱)\theta)}{\sin \theta}$$

$$۱۰) |\alpha| + |\beta| + |\gamma| = ۱ \Rightarrow |\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma| = |\alpha + \beta + \gamma| \quad (\text{سه عدد مختلط } \gamma, \beta, \alpha)$$

$$۱۱) (۱ + \cos \theta + i \sin \theta)^n + (۱ + \cos \theta - i \sin \theta)^n = ۲^{n+۱} \cos^n \frac{\theta}{۲} \cos \frac{n\theta}{۲}$$

۷- جواب معادلات زیر را به دست آورید:

$$۱) (z^۲ - ۲(۱+i)z - ۲)^۲ = -۸i$$

$$۲) z^۳ = \left(\frac{۱+i\sqrt{۳}}{\sqrt{۲-i\sqrt{۳}}}\right)^{۱۵}$$

$$۳) z^۶ - z^۵ + z^۴ - z^۳ + z^۲ - z + ۱ = ۰$$

$$۴) ۲z^۵ + z^۴ - ۶z^۲ + z + ۱ = ۰$$

۸- مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را بیابید که در روابط زیر صدق کنند:

$$۱) \left| \frac{z-1+i}{z-3i} \right| = \frac{1}{2}$$

$$۲) \left| \frac{z+j}{z-j} \right| = \left| \frac{z+1}{z-1} \right|$$

$$۳) \operatorname{Re}(z-1) = |z|$$

$$۴) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{R}$$

$$۵) \alpha \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta$$

## ۲.۰ تمرین های حد

۱- تساوی های زیر را اثبات نمایید:

$$۱) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x^2] + |2x|}{\sqrt{2x}} = 1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right] = 1$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 1} = 0$$

۲- در وجود یا عدم وجود حد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sin x} \text{ بحث کنید.}$$

۳- حدود زیر را به دست آورید:

$$۱) \lim_{y \rightarrow -3} \sqrt{\frac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]^2 - 1}{[x] - 1}$$

$$۲) \lim_{t \rightarrow \frac{2}{3}} \sqrt{\frac{4t^2 - 27}{4t^2 - 9}}$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x]^2 - 9}{[x] - 3}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$$

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow 0} \tan \left[ \frac{3}{\sin x} \right]$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + \sqrt{x}} - 3}{x - 8}$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x}$$

$$۵) \lim_{t \rightarrow -6} \frac{2}{t^2 + 3t - 6} - \frac{3}{t + 6}$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 4x}$$

$$۶) \lim_{y \rightarrow 4} \frac{2y^2 - 11y + 10}{3y^2 - 17y + 16} \cdot \frac{y + 8}{y + 16}$$

$$۱۶) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^2 x}$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow 0} x[|x|]$$

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x] - 1}{[x] - x}$$

$$۱۹) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)[|x|]$$

$$۲۰) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$$

$$۲۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)^{|x|} \sin x}{x^2}$$

- ۲۲)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{x}$
- ۲۳)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{11} \sin(\frac{1}{x})}{(1 - \cos x)^{10}}$
- ۲۴)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin^2(\frac{x}{x})} - \frac{1}{\sin^2 x}$
- ۲۵)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin(\frac{1}{x})$
- ۲۶)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin^2 \frac{1}{\sqrt{x}}$
- ۲۷)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$
- ۲۸)  $\lim_{t \rightarrow 1} (2x^t - x - 1) \tan(\frac{\pi}{t} x)$
- ۲۹)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$
- ۳۰)  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{-2t+1}{\sqrt{-3t^2+5}}$
- ۳۱)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}(x^t - x^t)$
- ۳۲)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\frac{x}{x}]$
- ۳۳)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - \sqrt{4x^2 - x + 1}}{x + 2 + \sqrt{x+3}}$
- ۳۴)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^2+1}}$
- ۳۵)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^{40} (x-1)^{20}}{(3x-1)^{10} (x+1)^{60}}$
- ۳۶)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 4})$
- ۳۷)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{x^2}$
- ۳۸)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x}) (\frac{1-5x^2}{x^2})$
- ۳۹)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{(2\sqrt{x+5})^2 (1-\sqrt{x})}$
- ۴۰)  $\lim_{x \rightarrow 0} x - 2 \operatorname{sgn} x$
- ۴۱)  $\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} x|$

۴- به کمک قضیه ساندویچ حدود زیر را محاسبه نمایید:

- ۱)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$
- ۲)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$
- ۳)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x}$
- ۴)  $\lim_{x \rightarrow 0} nx \lfloor \frac{m}{x} \rfloor$
- ۵)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 (\sin x + \cos^2 x)}{(x^2+1)(x-3)}$
- ۶)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{[x]}$
- ۷)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2}$
- ۸)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$
- ۹)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor \frac{1}{\sin x} \rfloor$

۵- کلیه مجانب‌های توابع زیر را بیابید:

۱)  $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$

۲)  $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$

$$۳) f(x) = \sqrt{x^{\gamma} + ۲x} - \sqrt{x^{\gamma} - ۲x}$$

$$۴) f(x) = \frac{x\sqrt{(x+۲)^{\gamma}}}{x-۱}$$

$$۵) f(x) = x\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}$$

$$۶) f(x) = \frac{۴x}{x^{\gamma}+۱}$$

$$۷) f(x) = x + \sqrt{x^{\gamma} + ۲x}$$

$$۸) f(x) = \frac{۴-۳x}{x+۱}$$

$$۹) f(x) = \frac{-۳x}{\sqrt{x^{\gamma}+۳}}$$

$$۱۰) f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-۱}}$$

$$۱۱) f(x) = \sqrt{\frac{۳x^{\gamma}-۲x^{\gamma}+۱}{x^{\gamma}+۴x^{\gamma}-۵}}$$

۶- مقدار  $c$  را طوری بیابید که  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = ۴$



## ۳.۰ تمرین های پیوستگی

۱- پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید:

$$۲) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} & x \leq -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & -3 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} & x \geq 3 \end{cases}$$

$$۳) f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x} & x < 0 \\ -x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

$$۴) f(t) = \begin{cases} \sin x - 1 & x \leq 0 \\ x - 1 & 0 < x < 3 \\ [2x - 1] & x > 3 \end{cases}$$

$$۵) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \leq 0 \\ [x] + |x + 1| & -0 < x \leq 1 \\ e^{x^2 - 1} + 3x & x > 1 \end{cases}$$

$$۶) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1 - \cos x}{x + 1} & x < 0 \end{cases}$$

۲- مقادیر  $a$  و  $b$  را به گونه‌ای به دست آورید که توابع زیر پیوسته باشد:

$$۱) f(x) = \begin{cases} ۲x - a & x < -۳ \\ ax + ۲b & -۳ \leq x \leq ۳ \\ b - ۵x & x > ۳ \end{cases}$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & x \leq ۳ \\ ax + b & ۳ \leq x \leq ۵ \\ x^۲ + ۲ & x \geq ۵ \end{cases}$$

$$۳) f(x) = \begin{cases} -۲ \sin x & x \leq -\frac{\pi}{۴} \\ a \sin x + b & -\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴} \\ \cos x & x \geq \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

$$۴) f(x) = \begin{cases} a[x] + bx^۲ + ۱ & x > ۲ \\ ۳ & x = ۲ \\ \frac{a|x-۲|}{x-۲} + bx & x < ۲ \end{cases}$$

$$۵) f(x) = \begin{cases} x(-۱)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & x \neq ۰ \\ a & x = ۰ \end{cases}$$

۳- نشان دهید معادله  $x^۳ - ۴x^۲ + x + ۳ = ۰$  ریشه‌های بین ۱ و ۲ دارد.

۵- نشان دهید معادله  $x^۵ - ۳x = ۱$  ریشه‌های بین ۱ و ۲ دارد.

۶- نشان دهید معادله  $\cos x = x$  دارای ریشه‌ای در بازه  $[۰, \frac{\pi}{۴}]$  است.

۷- نشان دهید معادله  $x^۳ + x + ۳ = ۰$  دارای ریشه‌ای در بازه  $[-۲, -۱]$  است.

۸- نشان دهید معادله  $۵x^۴ - ۳x^۳ + ۴x^۲ - ۱ = ۰$  دارای ریشه‌ای در بازه  $[۰, ۱]$  است.

۹- نشان دهید یکی از ریشه‌های معادله  $۳x^۳ - ۸x^۲ + x + ۳ = ۰$  بین ۰ و ۱، دیگری بزرگتر از

۱ و سومی کوچکتر از صفر است.

۱۱- فواصل پیوستگی توابع زیر را بیابید:

$$۱) f(x) = \frac{x}{\lceil x \rceil - x}$$

$$۲) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin x} \sqrt{x-1}}$$

$$۳) f(x) = \frac{x^5 - 2x + 1}{\sin x + 1}$$

$$۴) f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{3+x}}$$

$$۵) f(x) = \sqrt{\frac{1-\cos \pi x}{1-x^2}}$$

$$۶) f(x) = x \left[ \frac{1}{\sin x} \right]$$

$$۷) f(x) = \frac{1}{\lceil \sin^2 \frac{\pi x}{2} \rceil}$$

۱۲- پیوستگی تابع زیر را در بازه  $[-2, 2]$  بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) \cdot 2^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۱۳- پیوستگی تابع با ضابطه  $f(x) = (-1)^{\lceil x^2 \rceil}$  را بررسی کنید.

۱۴- بزرگترین مقداری از  $k$  را بیابید که به ازای آن تابع  $f(x) = \lceil x^2 - 2 \rceil$  روی بازه

$[3, 3+k]$  پیوسته باشد.

۱۵- اگر  $f$  تابعی پیوسته بر  $\mathbb{R}$  باشد که در رابطه  $\frac{\sqrt{x^2-4}}{f(1)f(x)+4} \leq 0$  صدق کند، نشان دهید  $f$

حداقل دارای یک صفر است.

### ۴.۰ تمرین های مشتق

۱- از توابع زیر مشتق بگیرید:

$$\begin{aligned} ۱) f(x) &= x^{\sqrt{x}} \cos(\sin x) + \frac{1}{x}(\tan x) & ۳) f(x) &= \sqrt[5]{x^{\sqrt{x}}} \sqrt{x^{\sqrt{x}} - 1} \sqrt[4]{x^{-\sqrt{x}} + 2} \\ ۲) f(x) &= \sqrt{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^{\sqrt{x}}-1}}} & ۴) f(x) &= (x^{\sqrt{x}} + \frac{1}{x})^{\sqrt{x}} - (x - \frac{\sqrt{x}}{x^{\sqrt{x}}})^{-\sqrt{x}} \\ & & ۵) f(x) &= \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{\sin^{\sqrt{x}} \sqrt{x+1}}\right)^{\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

۲- مشتق پذیری توابع زیر را در  $x = x_0$  بررسی کنید:

$$\begin{aligned} ۱) f(x) &= 1 + |x + \sqrt{x}|, \quad x_0 = -\sqrt{x} \\ ۲) f(x) &= \sqrt[3]{x+1}, \quad x_0 = -1 \\ ۳) f(x) &= (x - \sqrt{x})^{-\sqrt{x}}, \quad x_0 = \sqrt{x} \\ ۴) f(x) &= \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}, \quad x_0 = 1 \\ ۵) f(x) &= \sqrt{\sqrt{4} - \sqrt{16 - x^{\sqrt{x}}}}, \quad x_0 = 0 \\ ۶) f(x) &= \begin{cases} x^{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0 \\ ۷) f(x) &= \begin{cases} \sqrt{x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}} & x \leq \sqrt{x} \\ \sqrt{x} - \sqrt{x} & x > \sqrt{x} \end{cases}, \quad x_0 = \sqrt{x} \\ ۸) f(x) &= \begin{cases} \frac{x^{\sqrt{x}}}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0 \\ ۹) f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0 \\ ۱۰) f(x) &= \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$۱۲) f(x) = \begin{cases} [|x|] + ۱ & x < ۰ \\ ۱ + x^۲ \sin x & x \geq ۰ \end{cases}, x_0 = ۰$$

۳- به ازای چه مقادیری از  $a$  و  $b$  توابع زیر در نقطه داده شده مشتق پذیرند:

$$۱) f(x) = \begin{cases} ax^۲ + bx & x > ۱ \\ x^۳ & x \leq ۱ \end{cases}, x_0 = ۱$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ax + b & ۱ < x \leq ۲ \end{cases}, x_0 = ۱$$

$$۳) f(x) = \begin{cases} b + |x| & x < ۱ \\ a\sqrt{x} & x \geq ۱ \end{cases}, x_0 = ۱$$

۴- مقدار  $a, b, c$  را به گونه ای به دست آورید که تابع زیر در  $x_0 = ۱$  دارای مشتق مرتبه دوم

باشد:

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ & x < ۱ \\ ax^۲ + bx + c & x \geq ۱ \end{cases}$$

۵- مقدار  $a, b, c$  را به گونه ای به دست آورید که تابع زیر در  $x = x_0$  دارای مشتق مرتبه دوم

باشد:

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ & x \leq x_0 \\ a(x - x_0)^۲ + b(x - x_0) + c & x > x_0 \end{cases}$$

۶- بررسی کنید تابع زیر در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی مشتق پذیر است:

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x \notin \mathbb{Q} \\ ۱ & x = ۰ \\ \frac{1}{n} & (m, n) = ۱, x = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

۷- فرض کنید  $f$  تابعی مشتق‌پذیر باشد. مطلوب است تعیین حد زیر:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x-h) + f(x-2h) - f(x-3h) + f(x-4h)}{h}$$