به نام خداوند جان آفرین

حل مسائل نوبت اول درس ریاضی عمومی ۱ فنی و فیزیک دانشگاه سمنان. آذر ماه ۹۴

---

جواب سوال ۱: الف)

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$z^7 + az^5 + b = 0 \rightarrow \sqrt{2}^7 e^{i\frac{7\pi}{4}} + a\left(\sqrt{2}^5 e^{i\frac{5\pi}{4}}\right) + b = 0$$

(۲ نمره)

$$\rightarrow 8\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} + a\left(4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right) + b = 0$$

عملیات

$$\rightarrow 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) + 4\sqrt{2}a\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) + b = 0$$

$$\rightarrow 8 - 8i - 4a - 4ai + b = 0$$

(۱ نمره)

دستگاه و جواب

$$\rightarrow \begin{cases} Im(8 - 8i - 4a - 4ai + b) = 0 \rightarrow -8i - 4ai = 0 \rightarrow a = -2 \\ Re(8 - 8i - 4a - 4ai + b) = 0 \rightarrow 8 - 4a + b = 0 \xrightarrow{a=-2} b = -16 \end{cases}$$

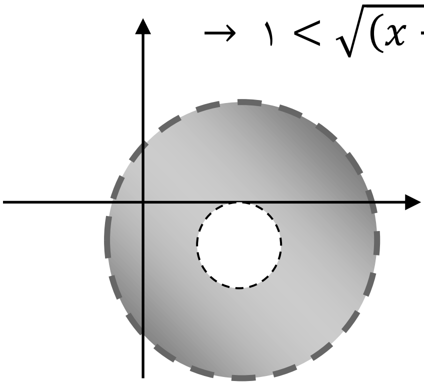
---

جواب سوال ۱: ب)

$$1 < |z - 2 + i| < 3 \rightarrow 1 < |x + iy - 2 + i| < 3 \rightarrow 1 < |(x - 2) + i(y + 1)| < 3$$

$$\rightarrow 1 < \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} < 3 \rightarrow 1 < (x - 2)^2 + (y + 1)^2 < 9$$

(۲ نمره)



مکان هندسی مساحت محصور بین دو دایره

به مرکز $(2, -1)$ و شعاع های ۱ و ۳ می باشد.

(سطح دایره ها را شامل نمی شود). (۱نمره)

---

جواب سوال ۲:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱+x\sin x}-\sqrt{\cos ۲x}}{tan^{۲}\frac{x}{۲}} \times \frac{\sqrt{۱+x\sin x}+\sqrt{\cos ۲x}}{\sqrt{۱+x\sin x}+\sqrt{\cos ۲x}}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۱+x\sin x-\cos ۲x}{tan^{۲}\frac{x}{۲}\left(\sqrt{۱+x\sin x}+\sqrt{\cos ۲x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱+x\sin x-(۱-۲\sin^{۲}x)}{tan^{۲}\frac{x}{۲}\left(\sqrt{۱+x\sin x}+\sqrt{\cos ۲x}\right)} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x\,(x+۲\sin x)}{\frac{sin^{۲}\frac{x}{۲}}{cos^{۲}\frac{x}{۲}}\left(\sqrt{۱+x\sin x}+\sqrt{\cos ۲x}\right)} \xrightarrow{\sin x=۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}$$

عملیات ۲/۵ نمره

جواب صحیح ۰/۵ نمره

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۲\cos^{۳}\frac{x}{۲}\,(x+۲\sin x)}{\sin\frac{x}{۲}\left(\sqrt{۱+x\sin x}+\sqrt{\cos ۲x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۲\cos^{۳}\frac{x}{۲}}{\left(\sqrt{۱+x\sin x}+\sqrt{\cos ۲x}\right)} \left[\frac{x}{\sin\frac{x}{۲}} + \frac{۲\sin x}{\sin\frac{x}{۲}}\right] =$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۲\cos^{۳}\frac{x}{۲}}{\left(\sqrt{۱+x\sin x}+\sqrt{\cos ۲x}\right)} \left[\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x}{۲}\times ۲}{\sin\frac{x}{۲}} + \frac{۲\sin x}{\sin\frac{x}{۲}}\right]$$

$$\xrightarrow{\sin x=۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} \lim_{x\to ۰} \frac{۲\cos^{۳}\frac{x}{۲}}{\left(\sqrt{۱+x\sin x}+\sqrt{\cos ۲x}\right)} \left[\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x}{۲}\times ۲}{\sin\frac{x}{۲}} + ۴\lim_{x\to ۰}\cos\frac{x}{۲}\right]$$

$$= \frac{۲}{۲}\times[۱\times ۲+۴] = ۶$$

---

نامساوی ۱ نمره

حد چپ و راست ۱ نمره

جواب ۱ نمره

$$\lim_{x\to ۰} nx\left[\frac{۱}{\sin kx}\right] = \qquad \frac{۱}{\sin kx}-۱ \le \left[\frac{۱}{\sin kx}\right] \le \frac{۱}{\sin kx}$$

$$\frac{nx}{\sin kx}-nx \le nx\left[\frac{۱}{\sin kx}\right] \le \frac{nx}{\sin kx}$$

$$\xrightarrow{x>۰} \lim_{x\to ۰}\left(\frac{nx}{\sin kx}-nx\right) \le \lim_{x\to ۰} nx\left[\frac{۱}{\sin kx}\right] \le \lim_{x\to ۰}\frac{nx}{\sin kx} \qquad (*)$$

توجه: چون $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x} = ۱$ حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin kx}{kx} = ۱$ نیز با تغییر متغیر $kx = t, t\to ۰$ همان ۱ می شود.

$$\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{\mathrm{nx}}{\sin \mathrm{kx}}-\mathrm{nx}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\,\mathrm{kx}}{\sin \mathrm{kx}}\right)-\lim_{x\to ۰}\mathrm{nx}=\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}-۰=\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$$

$$\xrightarrow{\text{فشردگی}}\ \lim_{x\to ۰^+}\mathrm{nx}\left[\frac{۱}{\sin \mathrm{kx}}\right]=\frac{n}{\mathrm{k}}$$

$$\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{\mathrm{nx}}{\sin \mathrm{kx}}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\,\mathrm{kx}}{\sin \mathrm{kx}}\right)=\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$$

برای $۰ < x$ نیز حد چپ می گیریم، فقط در نامساوی (❋) جهت عوض می شود. بنابراین حد چپ و راست (❋) برابر $\frac{n}{\mathrm{k}}$ است. بنابراین حد عبارت مذکور برابر $\frac{n}{\mathrm{k}}$ است.

---

عملیات ۲/۵ نمره و جواب ۰/۵ نمره

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱}{\mathrm{x}-۱}\right)^{\mathrm{lnx}}=$$

$$\mathrm{y}=\left(\frac{۱}{\mathrm{x}-۱}\right)^{\mathrm{lnx}}\ \to lny=lnx\left(\ln\left(\frac{۱}{\mathrm{x}-۱}\right)\right)=\ln\left(x+\frac{۱}{x-۱}\right)$$

$$\lim_{x\to ۱}\ln\left(x+\frac{۱}{x-۱}\right)=\ln(\lim_{x\to ۱}\left(x+\frac{۱}{x-۱}\right))$$
$$=\ln\left(\lim_{x\to ۱}\left(\frac{x^{۲}-x+۱}{x-۱}\right)\right)\xrightarrow{Hop}\ln\left(\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۲\mathrm{x}-۱}{۱}\right)\right)=\ln ۱=۰$$

$$\lim_{x\to ۱}(lny)=۰\ \to\ \lim_{x\to ۱}y=e^{۰}=۱$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱}{\mathrm{x}-۱}\right)^{\mathrm{lnx}}=\lim_{x\to ۱}e^{\ln x\ln\left(\frac{۱}{x-۱}\right)}=e^{L}=e^{۰}=۱$$

$$L=\lim_{x\to ۱}lnx\left(\ln\left(\frac{۱}{\mathrm{x}-۱}\right)\right)=\lim_{x\to ۱}-lnx(\ln(x-۱))=\lim_{x\to ۱}\frac{-\ln(x-۱)}{\frac{۱}{lnx}}$$

$$\xrightarrow{Hop} \lim_{x\to ۱} \frac{-\frac{۱}{x-۱}}{\frac{-۱}{ln^۲x}.\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to ۱} \frac{xln^۲x}{x-۱} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to ۱} \frac{ln^۲x + ۲lnx.\frac{۱}{x}}{۱} = ۰$$

---

جواب سوال ۳: صورت و مخرج کسر هر دو پیوسته هستند.(۱نمره) پس برای پیدا کردن تعداد نقاط ناپیوستگی کافیست تعداد ریشه های مخرج را مورد بررسی قرار دهیم.

$$f(x) = \frac{x+۲}{e^{-۲x}-x^۳} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$\begin{cases} q(۰) > ۰ \\ q(۱) < ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{بولتزانو}} q(۰)q(۱) < ۰ \to \text{مخرج حداقل یک ریشه دارد}$$ (۳ نمره)

فرض کنید $c_۳$ نقطه دیگری باشد که مخرج را صفر می کند، یعنی $q(c_۱) = q(c_۲) = ۰$ چون مخرج تابعی مشتق پذیر است. پس طبق قضیه رل نقطه $c_۳$ بین $c_۱$ و $c_۲$ وجود دارد به طوریکه
(۲ نمره)

$$q'(c_۳) = ۰ \ \to \ -۲e^{-۲c_۳} - ۳c_۳^۲ = ۰$$

این امکان پذیر نیست، چون طرف چپ عددی همواره منفی است. پس فقط یک ریشه در مخرج داریم.
(۲نمره)

و یا میتوانیم اینگونه استدلال کنیم که:

$$q'(x) = -۲e^{-۲x} - ۳x^۲$$

همواره منفی است و لذا تابع همواره نزولی است و طبق قضیه رول، تنها یک ریشه دارد $\to$

در نتیجه تابع تنها در یک نقطه ریشه مخرج ناپیوستگی دارد.

---

جواب سوال ۴: تابع $f(x) = \tan^{-۱} x$ را در نظر می گیریم (۱ نمره)، روی بازه $(۱, x)$ پیوسته است، لذا روی این بازه مشتق پذیر است. پس در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می کند. (۱ نمره) لذا $c \in (۱, x)$ وجود دارد که:

$$f'(c) = \frac{۱}{۱+c^۲} = \frac{\tan^{-۱} x - \tan^{-۱} ۱}{x-۱}$$

(۲نمره)

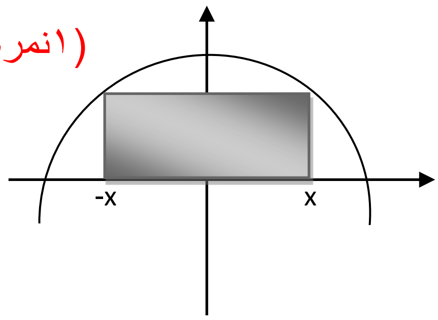
$$۱ < c < x \to ۱ < c^۲ < x^۲ \to ۲ < ۱ + c^۲ < ۱ + x^۲ \ \to \frac{۱}{۱+x^۲} < \frac{۱}{۱+c^۲} < \frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۱+x^{۲}} < \frac{\tan^{-۱} x - \tan^{-۱} ۱}{x-۱} < \frac{۱}{۲} \xrightarrow{x>۱} \frac{x-۱}{۱+x^{۲}} < \tan^{-۱} x - \tan^{-۱} ۱ < \frac{x-۱}{۲}$$

$$\rightarrow \frac{x-۱}{۱+x^{۲}} < \tan^{-۱} x - \frac{\pi}{۴} < \frac{x-۱}{۲} \rightarrow \frac{x-۱}{۱+x^{۲}} + \frac{\pi}{۴} < \tan^{-۱} x < \frac{x-۱}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

---

(۱نمره)




جواب سوال ۵: طول مستطیل را با توجه به شکل $۲x$ می گیریم.

(۱نمره)

$$S = ۲x(۹ - ۳x^{۲}) = ۱۸x - ۶x^{۳}$$

$$S' = ۱۸ - ۱۸x^{۲} = ۰ \rightarrow x = \pm ۱$$

| | | $-۱$ | | $۱$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'$ | − | | + | | − |
| $S$ | ↘ | -۱۲ | ↗ | ۱۲ | ↘ |
| | | Min | | Max نسبی | |

(۲نمره)

تشخیص اکسترمم نسبی

از طرفی حوزه تغییرات $x$ عبارت است از $۰ \le x \le \sqrt{۳}$.

$$x = ۰ \rightarrow s = ۰\,, \quad x = \sqrt{۳} \rightarrow s = ۰\,, \quad x = ۱ \rightarrow s = ۱۲$$

پس نقطه $x = ۱$ نقطه ماکزیمم مطلق مساحت می شود و مقدار ماکزیمم مساحت آن ۱۲ خواهد بود.(۲نمره)

---

جواب سوال ۶:

$$f(x) = xe^{-x^{۲}} \qquad D_f = R \qquad f(۰) = ۰$$

$$f'(x) = e^{-x^{۲}} - ۲x^{۲}e^{-x^{۲}} = e^{-x^{۲}}(۱ - ۲x^{۲}) = ۰ \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$ (۱ نمره)

$$f''(x) = -۶xe^{-x^۲} + ۴x^۳e^{-x^۲} = -۲xe^{-x^۲}(۳ - ۲x^۲) = ۰ \rightarrow x = ۰, x = \pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

(۱ نمره)

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x^۲} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^۲}} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to\infty} \frac{۱}{۲xe^{x^۲}} = ۰^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x^۲} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^۲}} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{۲xe^{x^۲}} = ۰^-$$

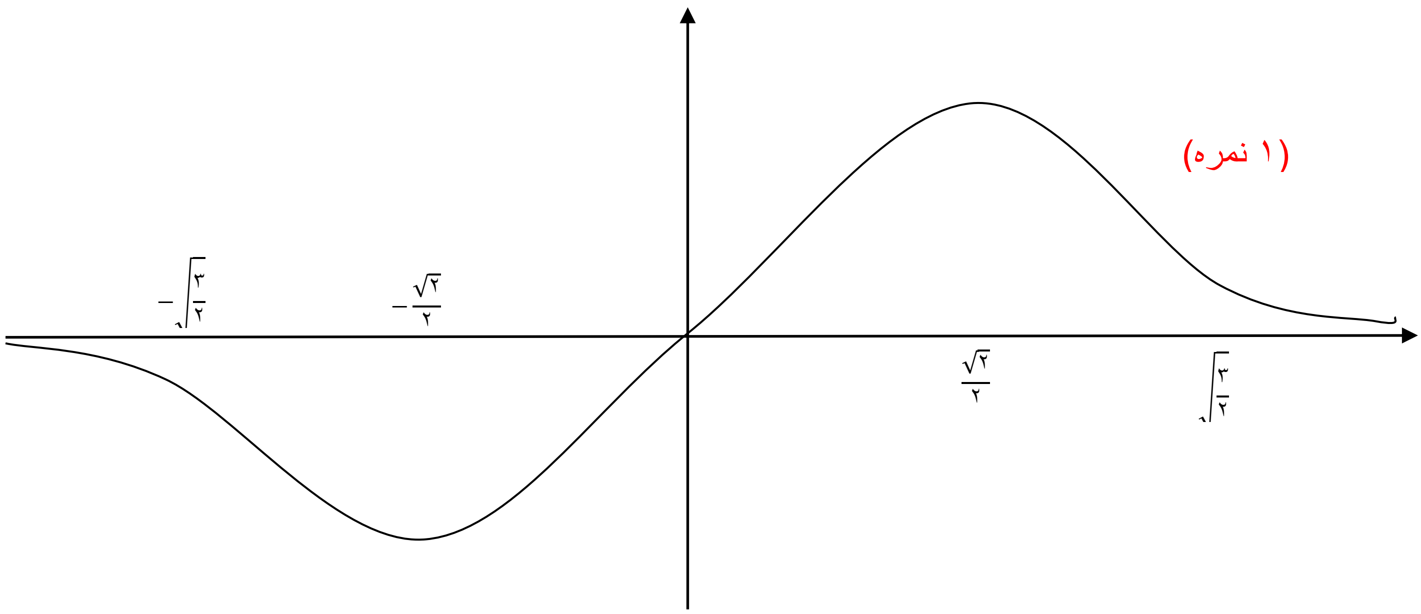
لذا $y = ۰$ مجانب افقی است.(۱ نمره)

در هیچ عدد حقیقی حد بینهایت نمیشود (به دلیل پیوستگی تابع) لذا مجانب قائم نداریم. (۱ نمره)

و در هیچ یک از دو شاخه حاصل حد بینهایت نیست و مجانب مایل نخواهیم داشت. (۱ نمره)

(۲ نمره) با جزئیات

| x | | $-\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ | | $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | | ۰ | | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | | $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | − | | − | | + | | + | | − | | − |
| $f''$ | − | | + | | + | | − | | − | | + |
| $f$ | ↘ | | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ | | ↘ |
| جهت تقعر | پایین | عطف | بالا | Min | بالا | عطف | پایین | Max | پایین | عطف | بالا |




(۱ نمره)