

۱۰. تمرین های پایان فصل

۱. اعداد مختلط زیر را به صورت $a + ib$ ساده کنید:

$$۱) \pi e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$۲) ۲i e^{\left(\frac{i\pi}{3}\right)} e^{i\pi}$$

$$۵) \frac{\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i\right)^6}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}$$

$$۴) ۳ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - ۲ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$$

۲. با فرض این که z عددی مختلط است تساوی های زیر را ثابت کنید:

$$۱) |z| = ۱ \Rightarrow \frac{|az + b|}{|bz + a|} = ۱$$

$$۲) \frac{۱ + \sin \theta + i \cos \theta}{۱ + \sin \theta - i \cos \theta} = \sin \theta + i \cos \theta$$

$$۳) |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = ۲(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$$۴) |z| < ۱ \Rightarrow \left| \operatorname{Arg} \frac{۱+z}{۱-z} \right| < \frac{\pi}{۲}$$

۳. معادلات زیر را حل کنید.

۱) $z^4 = -i$

۲) $z^2 = (-3 + 4i)^2$

۳) $iz^3 + 8 = 0$

۴) $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$

۵) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

۶) $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$

۷) $(z^2 - 2(1+i)z - 2)^2 = -8i$

۸) $z^3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \right)^{15}$

۴. ریشه‌های پنجم عدد $(1+i)^3$ را به دست آورید.

۶. مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را بیابید که در روابط زیر صدق کنند:

۱) $\left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$

۲) $1 < |z| \leq 3$

۳) $|z-i| = 1$

۴) $1 \leq |z-i| \leq 3$

۵) $\operatorname{Re}(z^2) > 0$

فصل اول: اعداد مختلط

$$۱۱) \operatorname{Re}(z - 5) = |z| + 5$$

$$۱۲) \left| \frac{z - 1 + i}{2z - 3i} \right| = \frac{1}{2}$$

$$۱۳) \left| \frac{z + j}{z - j} \right| = \left| \frac{z + 1}{z - 1} \right|$$

$$۱۴) z\bar{z} = 36$$

$$۱۵) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{R}$$

۸. ام

۹. حاصل عبارات زیر را با استفاده نمایش ماتریسی اعداد مختلط برای $z_1 = -1 - i$ و $z_2 = 2 + 3i$ به دست آورید.

$$۱) \frac{\bar{z}_2 - 1}{z_1 + 1}$$

$$۲) \overline{z_1 + 2i}$$

$$۳) \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

۱۰. نمایش قطبی عبارات زیر را بنویسید.

$$۱) z = \sin \theta + i \cos \theta$$

۱۱. ضمیمه (ویژه دانشجویان رشته ریاضی و دانشجویان علاقمند سایر رشته‌ها)

۱.۱۱ اثبات قضایا

اثبات. (قضیه ۱.۱)

مثال ۵۱.۲. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} + 3x \sin \frac{1}{x}}{x \sin \frac{1}{x}}$ نیز وجود ندارد زیرا برای هر همسایگی محذوف

$x = 0$ مانند $\{0\} - (-\alpha, \alpha)$ که در آن α عددی حقیق دلخواهی است، عدد $k \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که $x = \frac{1}{k\pi} \in (-\alpha, \alpha)$ و در نتیجه برای آن، مخرج صفر و کسر تعریف نشده است. وجود چنین k ای از خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی ثابت می شود (چگونه؟). در این مثال نیز نمی توان $x \sin \frac{1}{x}$ را از صورت و مخرج حذف کرد.

تمرین

حدود زیر را به دست آورید:

$$۱) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 2x - 6}{x^2 - 5x + 4}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1}}{x^2 - 3x}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{x - 2}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^2](3x+5)}{[x^2](2x+1)}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x^2 + 2x - 2}{x^2 + 3x^2 - 4}$$

تمرین

۱. مقدار $\lim \frac{1}{x}$ را در موارد زیر حساب کنید.

۱) $x \Rightarrow 10^+, x \Rightarrow 10^-$

۲) $x \Rightarrow \frac{1}{10}^+, x \Rightarrow \frac{1}{10}^-$

۲. مقدار $\lim [x]$ را در همه موارد تمرین ۱ به دست آورید.

۳. حدود زیر را به دست آورید:

۱) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} [\cos x]$

۲) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} [\cos x]$

۳) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin x]$

۴) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin x]$

۴.۱. حد بینهایت و حد در بینهایت

توجه به مقادیر $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ در نزدیکی $x = 3$ ، نشان می‌دهد هرچه قدر که بخواهیم می‌توانیم $f(x)$ را بزرگ کنیم، به شرط آن که x را به اندازه کافی به ۳ نزدیک اختیار کنیم. در

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$$

این وضعیت می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ، یعنی هرچه قدر که بخواهیم می‌توانیم $f(x)$

را بزرگ کنیم، یعنی از هر عددی مانند M بزرگتر، به شرط آن که فاصله x تا a یعنی $|x - a|$ را به اندازه کافی کوچک کنیم (یعنی کوچکتر از یک عددی مانند δ). بنابراین تعریف زیر را به

عنوان حد بینهایت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{[x]} = 1 \quad \text{طبق قضیه ساندویچ}$$

$$\begin{aligned} \text{۴) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right) \\ &= 0 \times \text{عدد کراندار} = 0 \end{aligned}$$

تمرین

حدود زیر را به دست آورید:

- ۱) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{6x^2 - x + 3}{3x^2 + 2x + 5} \right]$
- ۲) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(9x^8 + 8x^6 - 2x)^{\frac{1}{3}}}{(4x^{12} + 5x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}}$
- ۳) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2})$
- ۴) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^5 - 4x^2 + 3)^2}{(4x^2 + x^2 - 4)^5}$
- ۵) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$
- ۶) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$
- ۷) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$

تمرین

۱. با استفاده از دنباله‌ها نشان دهید حدهای زیر وجود ندارند:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} \tan \frac{1}{x}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0} \cot \frac{1}{x}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$$

۳. نشان دهید حد تابع زیر در هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

۴. مجانب‌ها

در این بخش به معرفی مجانب‌های خطی منحنی‌ها می‌پردازیم. به طور کلی در این کتاب بحث‌های راجع به منحنی‌های مجانبی را نخواهیم داشت به جز در رابطه با توابع هذلولوی که در بخش مربوطه به طور مختصر مورد بحث قرار خواهد گرفت. در این قسمت مجانب‌های

۷. تمرین های پایان فصل

سوالات سطح ۱

۱. حدود زیر را به دست آورید:

۱) $\lim_{t \rightarrow -5} \frac{t^2 - 25}{t + 5}$

۲) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{3x - 1}{9x^2 - 1}$

۳) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 8}{x + 2}$

۴) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - 4x^2}{5x^2 + 3x^2}$

۵) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 5x^2}{x^2 - 1}$

۶) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 - x + 1}{5x - 4x^2 + 2}$

۷) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x}{2x^2 - x^2 + 4}$

۸) $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{4u^2 + 5}{(u^2 - 2)(2u^2 - 1)}$

۹) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

۱۰) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8x^2 + 7x - 2}{9x^2 + 3x^2 + 5x} \right)^2$

$$۲۲) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$۲۳) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^y 2x}{4x^y}$$

$$۲۴) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}$$

۲. همه مخرجها را به صورت x^y بنویسید:

$$۱) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

$$۲) f(x) = \frac{-3}{(x - 2)^2}$$

$$۳) f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$$

$$۴) f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

$$۵) f(x) = \frac{5}{x^2 + 8x + 15}$$

۳. پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید:

$$۱) f(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & x < -2 \\ 0 & x = -2 \\ 11 - x^2 & x > -2 \end{cases}$$

۴. مقادیر a و b را به گونه‌ای به دست آورید که توابع زیر همه جا پیوسته باشد:

$$۱) f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ ax + b & -2 < x < 2 \\ 2x - 6 & x \geq 2 \end{cases}$$

۵. فواصل پیوستگی توابع زیر را بیابید:

۱) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

۳) $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}$

۵) $f(x) = \sqrt{x-x^2}$

۶. بزرگترین مقداری از k را بیابید که به ازای آن تابع $f(x) = [x^2 - 2]$ روی بازه $(k, 3 + k]$ پیوسته باشد.

سوالات سطح ۲

۱. حدود زیر را به دست آورید:

۱) $\lim_{t \rightarrow -4^-} \frac{2}{t^2 + 3t - 4} - \frac{3}{t + 4}$

۲) $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{2 - 3t - 2t^2}{16 + 6t - t^2}$

۳) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{6x^2 + x - 2}{2x^2 + 3x - 2}$

۴) $\lim_{t \rightarrow 3^-} \frac{t^2 + 9t^2 + 2 \cdot t}{t^2 + t - 12}$

۵) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

۶) $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{(h+1) - 1}{h}}$

۷) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{7 + \sqrt{x}} - 3}{x - 8}$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{[x]^2 - ۱۶}{x^2 - ۱۶}$$

$$۱۶) \lim_{x \rightarrow 0} x[x]$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x] - ۱}{[x] - x}$$

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow 0} [۱ - x^2]$$

$$۱۹) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ۱)[x]$$

$$۲۰) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]^2 - ۱}{[x] - ۱}$$

$$۲۱) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]^2 - ۱}{[x] - ۱}$$

$$۲۲) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-۱)^{[x]+۱}}{x^2 - ۴}$$

$$۲۳) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x^2] - ۱}{[x] - ۱}$$

$$۲۴) \lim_{x \rightarrow 0} 3x \left[\frac{2}{\Delta x} \right]$$

$$۲۵) \lim_{u \rightarrow 2^-} \frac{۱}{u - 2} - \frac{3}{u^2 - ۴}$$

$$۲۶) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin^2 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$۲۷) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2 + ۱)}{x(x + \cos x)}$$

$$۲۸) \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1}(x^2 - x^2)$$

$$۲۹) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x}$$

۲. همه مجانب‌های توابع زیر را بیابید:

۱) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}$

۲) $f(x) = \frac{x\sqrt{(x+2)^2}}{x-1}$

۳) $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

۴) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

۳. پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید:

۱) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1 - \cos x}{x+1} & x < 0 \end{cases}$

۴. مقادیر a و b را به گونه‌ای به دست آورید که توابع زیر همه جا پیوسته باشد:

۱) $f(x) = \begin{cases} [x] + 2a - b & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ x + b\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+1}{2(x-1)}\right) & x > 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} ۲ \\ ۲ \\ ۲ \end{matrix}$

۵. فواصل پیوستگی توابع زیر را بیابید:

۲) $f(x) = \frac{x}{[x] - x}$

۶) $f(x) = \frac{x^5 - 3x + 2}{\sin x + 1}$

سوالات سطح ۳

۱. حدود زیر را به دست آورید:

۱)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + x}{\sqrt{9x^2 + 1}}$$

۲)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 1)^{20} (x - 1)^{30}}{(3x - 1)^{10} (x + 1)^{60}}$$

۳)
$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1}}$$

۴)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}}}$$

۵)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{x^2}}}}{|2-x|}$$

۶)
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{2 - \sqrt{4x - x^2}}$$

۷)
$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{-2t + 1}{\sqrt{-3t^2 + 5}}$$

۸)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{2}{x^2}$$

۹)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x}$$

۱۰)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

۱۱)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^2 x}$$

۱۲)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$۲۶) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})}$$

$$۲۷) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$$

$$۲۸) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - x^2 - x + 1}$$

$$۲۹) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}}{1 - \cos x}$$

$$۳۰) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$$

$$۳۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x \cos 3x}{\sqrt{1 - x^2} - 1}$$

$$۳۲) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{1 - \cos 2x}$$

$$۳۳) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x^2 \left[\frac{1}{\sin^2 x} \right]$$

$$۳۴) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \left[\frac{1}{x} \right]$$

$$۳۵) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]}{\sin x}$$

$$۳۶) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]^2 - 9}{[x] - 3}$$

۲
۴

۲. همه مجانب‌های توابع زیر را بیابید:

$$۱) f(x) = \sin x + \frac{2x - 1}{3x + 2}$$

$$۲) f(x) = 2 \cos 3x + \frac{6x^2 - 4}{3x + 1}$$

$$۳) f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

۳. مقادیر a و b را به گونه‌ای به دست آورید که توابع زیر همه جا پیوسته باشد:

$$۱) f(x) = \begin{cases} x(-1)^{[\frac{1}{x}]} & x \neq 0 \\ ax + 2 & x = 0 \end{cases}$$

۴. نشان دهید معادله $x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$ ریشه‌ای بین ۱ و ۲ دارد.

۶. نشان دهید معادله $5x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 1 = 0$ دارای ریشه‌ای در بازه $[0, 1]$ است.

ست.

۷. نشان

۸. فواصل پیوستگی توابع زیر را بیابید:

$$۴) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 + \sin \sqrt{x-1}}} \quad ۴$$

$$۸) f(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{1 - x^2}} \quad ۱$$

مسائل مفهومی

! به

۱۰. تمرین های پایان فصل

سوالات سطح ۱

۱. از توابع زیر مشتق بگیرید:

$$۱) f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}$$

$$۲) f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$۳) f(x) = \frac{1}{8x^5 - 3x^2 + 7x}$$

$$۴) f(x) = \frac{2x^2 - 1}{\sin x + x}$$

۲. مشتق پذیری توابع زیر را بررسی کنید:

$$۱) f(x) = 1 + |x + 2|, \quad x_0 = -2$$

$$۴) f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$۶) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\wedge) f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x < 1 \\ (1-x)^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

۳. به ازای چه مقادیری از a و b توابع زیر در نقطه $x_0 = 1$ مشتق پذیرند:

$$f(x) = \begin{cases} ax^r + bx & x > 1 \\ x^r & x \leq 1 \end{cases} !$$

۸. برای $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ مقدار $(f^{-1})'(r)$ را به دست آورید.

۹. حد توابع زیر را به کمک قاعده هوییتال به دست آورید:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$$

۱۰. از رابطه $y\sqrt{x} = 6$ مقدار $\frac{dy}{dx} + \frac{\sqrt{y}}{x}$ در نقطه $(1, 4)$ کدام است؟

۱۳. برای $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ مقدار $(f^{-1})'(\frac{2}{5})$ را به دست آورید.

۱۴. مجموع مشتق‌های اول، دوم و سوم تابع با ضابطه $2x^2 - 2x - 2$ را یک بار در $x = 2$ ، یک بار در $x = -1$ و یک بار هم در $x = 0$ به دست آورید.

سوالات سطح ۲

۱. از توابع زیر مشتق بگیرید:

$$۱) f(x) = \sqrt{\sin^{\circ}(3x^{\circ} - x + 1)}$$

$$۲) f(x) = x^{\circ} \cos(\sin x) + \frac{1}{x}(\tan x)$$

$$۳) f(x) = (1 + \sqrt{3x})\sqrt{x^{\circ} + x + 1}$$

$$۴) f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x}}{(\lambda - 3x)^{\circ} \sqrt{(x^{\circ} - 2x)^{\circ}}}$$

$$۵) f(x) = (x^{\circ} + \frac{1}{x})^{\circ} - (x - \frac{2}{x^{\circ}})^{-\circ}$$

$$۶) f(x) = \sqrt{\sin \frac{1}{x}} + \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$$

۲. مشتق‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید:

$$۱) f(x) = \sqrt{1-2x}$$

$$۳) f(x) = \begin{cases} x^r \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$۵) f(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۳. به ازای چه مقادیری از a و b توابع زیر در نقطه داده شده مشتق پذیرند:

$$۱) f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} & x > 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & 0 \leq x \leq 1 \\ ax + b & 1 < x \leq 2 \end{cases}, x_0 = 1$$

۴. مقدار a, b, c را به گونه‌ای به دست آورید که تابع زیر در $x_0 = 1$ دارای مشتق مرتبه دوم

باشد:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ ax^2 + bx + c & x \geq 1 \end{cases}$$

۵. مقدار a, b, c را به گونه‌ای به دست آورید که تابع زیر در $x = x_0$ دارای مشتق مرتبه دوم

باشد:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq x_0 \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c & x > x_0 \end{cases}$$

۶. مقدار b را طوری بیابید که تابع f در b پیوسته باشد و سپس مشتق‌پذیری تابع f را در مقدار

به دست آمده برای b بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{3} & x \leq b \\ 2x-1 & x > b \end{cases}$$

۹. برای تابع زیر مقادیر a, b, c را طوری بیابید که $f''(1)$ موجود باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ ax^2 + bx + c & x \geq 1 \end{cases}$$

۱۰. اگر $f(0) = 0$ و $f(x) = \sin(4x - f(x))$ ، آنگاه مقدار $f'(0)$ را به دست آورید.

۱۱. فرض کنید که f روی بازه $(-a, a)$ مشتق پذیر باشد. ثابت کنید که اگر f تابعی زوج (فرد) باشد، آنگاه f' متناظرا فرد (زوج) است.

۱۲. از $\frac{1}{4}$ د؟

۱۳. از نقطه $(0, 3)$ چند قائم می توان بر منحنی $y = \frac{1}{4}x^2$ رسم کرد؟

۱۶. $y = \cos^{-1}(\sin x)$ در چه نقاطی مشتق پذیر نیست؟

۱۷. اگر تابع زیر در $x = 0$ مشتق پذیر باشد حوزه مقادیر α چه خواهد بود؟

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۱) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{x}{\frac{\pi}{4}}\right) \tan\left(\frac{\pi x}{\frac{\pi}{4}}\right)$

۲) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

۲۱. a را طوری بیابید که $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^2}{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)} = \frac{2}{\pi^2}$

۲۲. از نقطه داده شده معادله مماس و قائم بر منحنی داده شده را به دست آورید.

$$۱) x^2 + xy + y^2 - 3y = 10; (2, 3) \quad ۴) y = \sqrt{\tan x}; \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$$

$$۲) y = 3x^2 + 2x + 1; (0, 4) \quad ۵) y = \arctan(\sin x); \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$۳) y = x^2 + 1; (3, 2)$$

۲۳. اگر خط مماس بر منحنی $y = \frac{x-3}{2x+1}$ بر خط به معادله $2y + 14x = 9$ عمود باشد، طول نقطه تماس چقدر است؟

۲۴. $\sin^{-1}(\cos x)$ را در $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق کنید.

۲۸. معادله مماس بر منحنی معکوس تابع با ضابطه $y = 3x + \sin x$ را در نقطه به طول 3π واقع بر نمودار معکوس به دست آورید.

۲۹. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک به یک و معکوس پذیر است و $f'(x) = \sqrt{9 + f^2(x)}$ مقدار $(f^{-1})'(5)$ را به دست آورید.

۳۰. $\sin^{-1}(\cos x)$ را در $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق کنید.

۳۱. $\sin^{-1}(\cos x)$ را در $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق کنید.

۳۱. $y = \sin^{-1}(\cos x)$ در چه نقاطی مشتق پذیر نیست؟

۳۲. $\sin^{-1}(\cos x)$ را در $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق کنید.

۳۳. اگر $y = \frac{(\sin x + \cos x)^3}{1 + \sin 2x}$ حاصل جمع مشتق‌های اول، دوم و سوم را به دست آورید.

۳۴. مشتق مرتبه پنجاهم $y = \sin x \cos x$ را به دست آورید.

۳۵. در چند نقطه از منحنی به معادله $y = 2x + \sin x$ مماس موازی محور x ها و در چند نقطه

از آن مماس موازی نیمساز ربع اول و سوم است؟

اس

ط

۴۰. زاویه بین خط $y = x$ و منحنی $y = 3 \sin x$ در مبدا را بیابید.

سوالات سطح ۳

۱. از توابع زیر مشتق بگیرید:

$$۱) f(x) = \sqrt{\left(\frac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x + 1}\right)^5}$$

$$۲) f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\tan x}}}$$

$$۳) f(x) = \sqrt[5]{x^3 \sqrt{x^6 - 1} \sqrt{x^{-2} + 2}}$$

$$۴) f(x) = \sqrt{(x^7 + (2x + 1)^7 + 1)^2 + 1}$$

۲. مشتق پذیری توابع زیر را بررسی کنید:

$$۱) f(x) = \sqrt{۴ - \sqrt{۱۶ - x^2}}$$

$$۳) f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ ۱ - x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

بند ۱۱.

۴. بررسی کنید تابع زیر در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی مشتق پذیر است:

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x \notin \mathbb{Q} \\ ۱ & x = ۰ \\ \frac{۱}{n} & (m, n) = ۱, x = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

۵. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر باشد، مقدار حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{h \rightarrow ۰} \frac{-f(x-h) + f(x-2h) - f(x-3h) + f(x-4h)}{h}$$

تابع و پیوستگی مشتق تابع را بررسی کنید. $(m, n \in \mathbb{N})$

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin^m \frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۸. اگر f و g توابعی باشند که $f(x) = x + x^2 g(x)$ و $|g(x)| \leq 1$ ، آیا f در صفر مشتق پذیر است؟

۹. معادله مماس و قائم بر منحنی معکوس تابع با ضابطه $y = x^2 + 3x$ را در نقطه به طول ۱۴ واقع بر نمودار معکوس به دست آورید.

۱۲. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک به یک و معکوس پذیر است و $f'(x) = \sin \sqrt{3f'(x)}$ مقدار $(f^{-1})'(\sqrt{v})$ را به دست آورید.

۱۳. اگر $f'(x) = \frac{1}{\sin x}$ ، مشتق تابع با ضابطه $y = f(x + \sqrt{1+x^2})$ را به دست آورید.

۱۸. مشتق n ام تابع $y = \cos x \cos 2x \cos 3x$ را به دست آورید.

۱۹. مجموع مشتق‌های اول، دوم و سوم تابع با ضابطه $2x^2 - 2x - 2$ را یک بار در $x = 2$ ، یک بار در $x = -1$ و یک بار هم در $x = 0$ به دست آورید.

۲۰. حد ته‌انح زیر را به کمک قاعده هوییتال به دست آورید:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + x^2} \sin \frac{1}{x}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^2}$$

۲۱. ثابت کنید که خطوط مماس در مبدا بر منحنی‌های $0 = 4y^3 - x^2y - x + 5y$ و $0 = x^2 - 4y^2 + 5x + y$ عمودند.

۲۳. اگر تابع با ضابطه زیر در $x = 0$ مشتق‌پذیر باشد حوزه مقادیر α چه خواهد بود؟

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۲۴. مشتق تابع با ضابطه $f(x) = (x^3 - 1)(x^3 - 2)(x^3 - 3) \dots (x^3 - 10)$ را در $x = 3$ به دست آورید.

۲۷. اگر خط مماس بر منحنی $y = \frac{x-3}{2x+1}$ بر خط به معادله $2y + 14x = 9$ عمود باشد، طول نقطه تماس چقدر است؟

۳. رابطه بین شعاع قاعده و ارتفاع استوانه به صورت $r + h = 15$ است. شعاع قاعده

چقدر اختیار شود تا سطح جانبی استوانه ماکزیمم گردد؟

۵. مستطیلی به مساحت ماکزیمم، در نیم‌دایره‌ای به شعاع R محاط شده و یک ضلع آن روی قطر نیم‌دایره قرار دارد. طول مستطیل کدام است؟

سوالات سطح ۲

۱. ثابت کنید $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$.

۲. ابتدا برای اعداد حقیقی دلخواه x_1 و x_2 نشان دهید $|\cos x_1 - \cos x_2| \leq |x_1 - x_2|$.

سپس نتیجه بگیرید:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x} = 0$$

ک

۵. نمودار توابع زیر را با ذکر تمام جزئیات رسم کنید. (تعیین دامنه، به دست آوردن مجانب‌ها، جدول تغییرات با تعیین علامت مشتق اول و دوم، مشخص کردن نقاط اکسترموم نسبی،

عطف و نقاط مشتق‌ناپذیری)

$$1) y = \frac{x}{1-x^2}$$

$$۳) y = \sqrt{x+5} - \sqrt{x+1}$$

$$۴) y = \sin x - \cos x; x \in [0, 2\pi]$$

$$۵) y = \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}$$

$$۶) y = \sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}$$

۶. در داخل کره‌ای به شعاع ۶ واحد، مخروطی با حجم ماکزیمم محاط می‌کنیم. ارتفاع مخروط کدام است؟

۷. را بیابید.

۸. است و

۹. مقادیر زیر را با استفاده از تقریب خط مماس با یک عدد گویا تقریب بزنید.

$$\sqrt[3]{345} \quad \sqrt{510} \quad \sqrt[3]{755} \quad \sqrt{18}$$

سوالات سطح ۳

۱. ثابت کنید $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \arcsin(0.6) < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$

۳. به کمک قضیه مقدار میانگین نشان دهید:

$$\frac{x-1}{x^2+1} + \frac{\pi}{4} < \arctan x < \frac{x-1}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (x > 1)$$

۴. نمودار توابع زیر را با ذکر تمام جزئیات رسم کنید. (تعیین دامنه، به دست آوردن مجانب‌ها،

جدول تغییرات با تعیین علامت مشتق اول و دوم، مشخص کردن نقاط اکسترموم نسبی،

عطف و نقاط مشتق‌ناپذیری)

$$۱) y = \frac{\cos x}{1 + \cos x}; \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$۲) y =$$

۵. برد تابع $y = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sin x + 2}$ را به دست آورید.

۶. کوتاه‌ترین فاصله مبدا مختصات از نقاط منحنی به معادله $y = \frac{3}{x^2}$ را به دست آورید.

$$S^* = \int_2^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{609}{3} = 152,037$$

همان طور که می‌بینید در اینجا S^* نسبت به \bar{S} و \underline{S} به S نزدیک تر است.

حال اگر بازه را به جای ۱۰ قسمت به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، داریم:

$$\bar{S} = 154,0097, \underline{S} = 154,4997, S = 152,2476$$

تمرین

۱. برای $\int_3^7 \frac{1}{x} dx$ با $n = 5$ و بازه‌های با طول مساوی و $p_i = \frac{\bar{p}_i + p_i}{2}$ مقادیر \bar{S} ، \underline{S} و S را محاسبه کرده و آن‌ها را با مقدار دقیق انتگرال یعنی $\frac{91}{900}$ مقایسه کنید.

۳. مساحت ذوزنقه زیر را ابتدا با روش هندسی محاسبه کنید؛ سپس با استفاده از انتگرال‌گیری تابع مربوطه روی بازه $[3, 7]$ با بازه‌های با طول مساوی $p_i = \frac{\bar{p}_i + p_i}{2}$ یک بار با $n = 5$ و یک بار با $n = 10$ مقادیر \bar{S} ، \underline{S} و S را به دست آورید و با مقدار دقیق آن که از روش هندسی حاصل شده، مقایسه کنید.

$$(ii) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$(iii) f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$(iv) f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

$$(v) m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$(vi) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{با شرط پیوستگی } f \text{ بر } [a, b]$$

$$(vii) \int_a^a f(x) dx = 0$$

قضیه ۳.۵. فرض کنید f بر بازه I پیوسته باشد و a و b و c سه نقطه دلخواه از I باشند. آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

که در آن c الزاماً بین a و b نیست.

تمرین

۱. به کمک مثال ۱۳۵.۵ و قضیه ۲.۵ مقدار انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$۱) \int_5^0 (2x + 7) dx$$

$$۲) \int_5^0 (5x^2 + 2x) dx$$

$$۳) \int_a^b (cx + d) dx$$

۲. فرض کنید f بر $[-۲, ۳]$ پیوسته باشد. ثابت کنید

$$\begin{aligned} ۱) \int_{-۲}^{-۱} f(x)dx + \int_{-۱}^۳ f(x)dx + \int_{۳}^۱ f(x)dx + \int_{۱}^{-۱} f(x)dx \\ = \int_{-۱}^۰ f(x)dx + \int_{-۲}^{-۱} f(x)dx + \int_{۳}^۲ f(x)dx \end{aligned}$$

۳. نشان دهید

$$۲) \frac{۷}{۴} \leq \int_{\frac{۱}{۴}}^{\frac{۲}{۳}} \left(\frac{۴}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} - ۴x^{\frac{۲}{۳}} + ۳x + ۱ \right) dx \leq ۳$$

مثال ۱۳۸.۵. مشتق دو تابع زیر را بر حسب x به دست آورید.

$$۱) \int_{\frac{1}{x}}^{\sin x^2} \cos t^2 dt \qquad ۲) \int_{x^2}^{\frac{1}{x}} \sqrt[3]{t^2 + \sqrt{t}} dt$$

حل:

$$\begin{aligned} ۱) \frac{d}{dx} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\sin x^2} \cos t^2 dt \right) &= \cos(\sin x^2)^2 \times (\cos x^2) \times 2x \\ ۲) \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^{\frac{1}{x}} \sqrt[3]{t^2 + \sqrt{t}} dt \right) &= \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^{\frac{1}{x}} \sqrt[3]{t^2 + \sqrt{t}} dt \right) + \frac{d}{dx} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} \sqrt[3]{t^2 + \sqrt{t}} dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(- \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \sqrt[3]{t^2 + \sqrt{t}} dt \right) + \frac{d}{dx} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} \sqrt[3]{t^2 + \sqrt{t}} dt \right) \\ &= -\sqrt[3]{(x^2)^2 + \sqrt{x^2}} \times 2x^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) \end{aligned}$$

انتخاب عدد ۵ برای شکستن انتگرال دلیل خاصی ندارد و می‌توان هر عدد دیگری را نیز انتخاب کرد.

تمرین

۱. مقدار c صادق در قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها را برای توابع زیر در بازه‌های مربوطه به دست آورید.

$$۱) f(x) = 3x^2; [2, 5]$$

$$۲) g(x) = 4x + 9; [-3, 4]$$

ابر

۳. مقدار میانگین توابع با ضابطه‌های $f(x) = 3x^2$ و $g(x) = 4x + 9$ را بر بازه $[-2, 2]$ به دست آورید.

۴. مقادیر زیر را به دست آورید.

$$۱) \frac{d}{dx} \int_2^{3x^2} \sin \frac{1}{t} dt$$

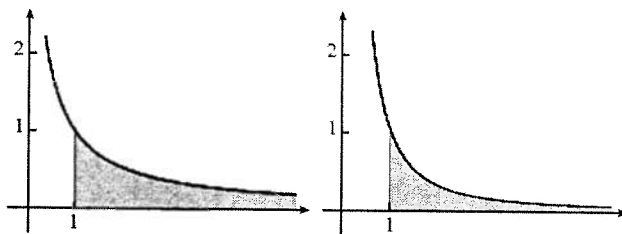
$$۲) \frac{d}{dx} \int_{\sin \sqrt{x}}^{\sqrt{\sin x}} t^t dt$$

$$۳) \frac{d}{dx} \int_3^5 \cos x^t dx$$

اثبات این گزاره به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌گردد.

** باز هم مساحت زیر منحنی $y = \frac{1}{x}$ ؛ اما این بار مقایسه آن با $y = \frac{1}{x^2}$.

به ناحیه زیر دو منحنی شکل (۱۸.۵) از $x = 1$ تا بینهایت توجه کنید. هر دو ناحیه بی‌کران هستند؛ یعنی هیچ دایره‌ای با شعاع متناهی نمی‌تواند تمام ناحیه را در خود جای دهد. ظاهر شکل‌ها نشان می‌دهد که نباید اختلاف قابل توجهی بین مساحت این دو ناحیه وجود داشته باشد. ولی در فصل انتگرال‌های ناسره نشان خواهیم داد مساحت نمودار اول بینهایت بوده در حالی که مساحت نمودار دوم تنها یک واحد است.



شکل ۱۸.۵: مقایسه مساحت زیر دو منحنی $y = \frac{1}{x}$ با $y = \frac{1}{x^2}$

تمرین

۱. مساحت بین نمودار f و محور x ها را در بازه‌های داده شده به دست آورید.

(الف) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ از $x = 1$ تا $x = 3$

(ث) $f(x) = \sin 3x - \cos 3x$ از $x = 0$ تا $x = \pi$

ج) $f(x) = |x + 3|$ از $x = -4$ تا $x = 2$

۲. مساحت بین منحنی‌های داده شده را در بازه‌های مذکور به دست آورید.

الف) $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = 2x^3$ از $x = 3$ تا $x = 5$

ت) $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{-1}{x}$ از $x = 1$ تا $x = 3$

۳. مساحت بین دو منحنی $y = \frac{1}{x}$ و $y = x^2$ را در دو حالت زیر حساب کنید:

الف) بین دو منحنی و محور x در ناحیه اول از $x = 0$ تا $x = 3$ ؛

ب) بین دو منحنی و محور y در ناحیه اول از $y = 0$ تا $y = 3$ ؛

۴.	ب	منحنی
	۲	ست.

۶. مقایسه قضیه مقدار میانگین در انتگرال و مشتق

در این بخش به ارتباط بین قضایای مقدار میانگین در انتگرال و مشتق می‌پردازیم. در بحث

مشتق گفته شد "هرگاه F بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\exists c \in (a, b) \text{ s.t. } F(b) - F(a) = F'(c)(b - a)$$

حال اگر F تابع اولیه f باشد، از صورت II قضیه اساسی حساب دیفرانسیل داریم:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a); \quad F'(x) = f(x)$$

۴. مقادیر انتگرال‌های زیر را فقط با تعبیر انتگرال به عنوان مساحت زیر منحنی به دست آورید.

۲۸۵

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$\int_{-2}^2 (4-|x|) dx$$

۵. تابع زیر را در نظر بگیرید. نشان دهید $\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{3}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۶. فرض کنید $a < b$. ثابت کنید کمترین مقدار $\int_a^b (f(t) - x)^2 dt$ برای حالتی است که در آن x مقدار میانگین تابع f روی $[a, b]$ باشد.

۷. مقادیر زیر را به دست آورید.

$$۱) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} x \sin t dt$$

$$۲) \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{\sin x} \frac{\cos t}{x} dt$$

x^2

۸. اگر $\int_{-x}^{x^2} f(t) dt = x^2 \sin \pi x$ آنگاه مقدار $f(\sqrt{2})$ را به دست آورید.

۹. حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{5+x} \sqrt{1+x^2} dx \quad ۲)$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_x^{x^2} \sin t^2 dt$$

۱۰. فرض کنید مقدار $f(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\sqrt{x}} (\sqrt{t} + \cos(\sin t)) dt$ در این صورت مقدار $\left(\frac{d}{dx} f^{-1}(x)\right)$ را در $x = 0$ به دست آورید.

۱۲. مقدار انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

$$۱) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (|x| + |\cos x|) dx$$

$$۲) \int_{-1}^1 |x^2 - x| dx$$

$$۳) \int_0^{2\pi} (|\sin x| + \cos x) dx$$

$$۴) \int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$۵) \int_0^5 \frac{dx}{25 + x^2}$$

۱۳. حدود زیر را با استفاده از تعریف انتگرال به دست آورید.

$$۱) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(2n + \sqrt{k})^2}$$

$$۲) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(2n + \sqrt{k})^2}{n^2}$$

مشتق و جواب را با روش‌های گوناگون پیدا کنید و با هم مقایسه کنید

۲۹۷

فصل ششم توابع نمایی و لگاریتمی

$$۱) y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}; x \neq 2$$

۲. برای هر یک از عبارات زیر مشتق y را بر حسب x به دست آورید.

$$۱) y = \ln x^x (\ln x)^x$$

$$۲) y = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} \right)$$

$$۳) y = \int_2^{\ln x} \left(\frac{\sin t}{t} \right) dt$$

۳. نمودار توابع زیر را رسم کنید. (اکسترم‌های نسبی، نقاط عطف و مجانب‌ها را بیابید و

جدول تغییرات را تشکیل دهید)

$$۱) y = \frac{x^2}{4} - \ln x$$

$$۲) y = x \ln x$$

۴. مقدار انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$۱) \int \frac{3dx}{4x+5}$$

$$۲) \int \frac{3x^2 + 5x - 1}{x^2 + 4} dx$$

$$۳) \int \csc x dx$$

مثال ۱۶۴.۶. حد زیر را به دست آورید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_{e^{x-1}}^{e^x} \sin \frac{\pi}{4} t^4 dt}{x^2 - 1}$$

حل: چون حد صورت و مخرج هر دو صفر است از هویتال استفاده می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} (e^x - 1)^4 \cdot e^{x-1} - (\sin \frac{\pi}{4} x^4) \cdot 2x}{2x} = \frac{1 - 2}{2} = \frac{-1}{2}$$

تمرین

۱. مشتق توابع زیر را بر حسب x به دست آورید.

$\ln x$

۱) $y = \sin x e^{\sqrt{x}}$

۲) $y = \frac{e^{2x^2}}{e^x + 1}$

۳) $y = \ln \left(\frac{e^{x^2} - 1}{e^x + 1} \right)$

۲. انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

۱) $y = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

۲) $y = \int x e^{-x^2} dx$

۳) $y = \int \sec^2 x e^{\tan x} dx$

۳. نمودار توابع زیر را رسم کنید. (اکسترم‌های نسبی، نقاط عطف و مجانب‌ها را بیابید و

جدول تغییرات را تشکیل دهید)

۱) $f(x) = x e^{-x^2}$

۳) $h(x) = \sqrt{x} e^{-x}$

۲) $g(x) = x^2 e^{-x}$

۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(\sin t) dt}{x}$

۴. حدود زیر را به دست آورید.

۵. تمرین های پایان فصل

سوالات سطح ۱

۱. برای هر یک از عبارات زیر مشتق y را بر حسب x به دست آورید.

$$۱) y = \ln(3 - 5x)$$

$$۲) f(x) = \ln(4 + x^2)$$

$$۳) f(x) = \ln\sqrt{x^2 + 1}$$

$$۴) y = \ln(3x + 3)^2$$

$$۵) y = \ln(\ln x)$$

۲. مقدار انتگرال های زیر را حساب کنید.

$$۱) \int (\csc 2\theta - \cot 2\theta)^2 d\theta$$

$$۲) \int \frac{\sec x \tan x}{\sec x + 3} dx$$

$$۳) \int \frac{\sec x \tan x}{\sec x - 1} dx$$

$$۴) \int \frac{3e^{-x}}{2e^{-x} + 5} dx$$

۳. حد توابع زیر را به کمک قاعده هوییتال به دست آورید:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(\sin \pi x)}{\cos \pi x}$$

۴. مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که تابع زیر در مبدأ مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(a + e^x) & x \geq 0 \\ \ln(2 + bx) & x < 0 \end{cases}$$

سوالات سطح ۲

۱. برای هر یک از عبارات زیر مشتق y را بر حسب x به دست آورید.

$$۱) y = \ln(\ln(x^2 + 1))$$

$$۲) y = \ln|\sec x|$$

$$۳) y = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

$$۴) y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$۵) f(x) = e^{x^2-x} + 3\sqrt{x}$$

$$۶) y = \ln(\cos x) + e^{\sin x}$$

$$۷) y = \log(\sin 3x) + \ln(\ln x)$$

$$۸) y = x^2 \ln x + \sqrt{5^{2x}}$$

$$۹) y = (x^2 + 2)^{\ln x}$$

$$۱۰) y = (x^{\tan x})^{\sqrt{x}}$$

$$۱۱) y = \int_x^2 \sqrt{1+t^2} dt$$

۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید. (اکسترم‌های نسبی، نقاط عطف و مجانب‌ها را بیابید و

جدول تغییرات را تشکیل دهید)

$$۱) y = x - \ln x$$

$$۲) y = \frac{x}{\ln x}$$

۳. مقدار انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$۱) \int \sqrt{1 + \tan^2 x} dx$$

$$۲) \int \sec\left(\frac{x}{2} + 5\right) dx$$

$$۳) \int \frac{x+4}{x^2+6x+9} dx$$

$$۴) \int \frac{x^2 - 6x - 20}{x+5} dx$$

۴. حد توابع زیر را به کمک قاعده هوییتال به دست آورید:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} \cos x$$

۵. پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید.

$$۱) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \leq 0 \\ [x] + |x+1| & -1 < x \leq 1 \\ e^{x^2-1} + 3x & x > 1 \end{cases}$$

$$۳) g(x) = \begin{cases} e^{x-۲} + [x] & x < ۲ \\ ۲x - ۲ & x = ۲ \\ \ln(x^۲ - ۳) + [x + ۱] & x > ۲ \end{cases}$$

سوالات سطح ۳

۱. برای هر یک از عبارات زیر مشتق y را بر حسب x به دست آورید.

$$۱) y = \ln \left| \frac{\sin x - ۱}{۲ + \cos x} \right|$$

$$۲) y = \ln \sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}$$

$$۳) y = \int_1^{\ln x} \frac{t^۲ + ۳}{\sin t} dt$$

$$۴) y = x \ln(\ln x^۲)$$

$$۵) y = e^{\sqrt{\sin x}} \cdot \ln \sqrt{x}$$

$$۶) y = \int \frac{e^{\sin x} \sin x}{\sin e^x \cdot x} dx$$

$$۷) y = \int \frac{\ln x}{x^۲} \sqrt{\ln t} \cdot e^t dt$$

$$۸) y = \tan x^{\sin x}$$

$$۹) y = \sec^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} \tan^{-1}(\sqrt{x}) \right)$$

$$۱۰) y = (\tan^{-1} x)^{\frac{1}{x^۲+۱}}; x > ۰$$

$$۲۲) y = \log_2[\log_2[\log_2 x]]$$

$$۲۳) y = \log_{10}[\log_{10}(x^2)]$$

$$۲۴) y = x^{x^2} \quad (x > 0)$$

$$۲۵) y = x^{\Delta\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید. (اکسترمم‌های نسبی، نقاط عطف و مجانب‌ها را بیابید و

جدول تغییرات را تشکیل دهید)

$$۱) y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$۲) y = xe^{-x}$$

$$۳) y = xe^{-\sqrt{x}}$$

۳. مقدار انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$۱) \int \frac{\Delta \ln(\frac{1}{x})}{x} dx$$

$$۲) \int \frac{x^2 - 7x + 2}{3x^2 + 9} dx$$

۴. حد توابع زیر را به کمک قاعده هسپیتال به دست آورید:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan^3 x} - 1}{\ln(2 - \cos x)}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sqrt{2} \sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 1} \right)^{\frac{2x+1}{x}}$$