

نمونه سوالات ریاضی ۲ - قسمت میان ترم

– با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$۱) \lim_{(x,y) \rightarrow (۲,۴)} (۵x - ۳y) = -۲$$

$$۲) \lim_{(x,y) \rightarrow (۱,۲)} (۴x + ۲y) = ۸$$

$$۳) \lim_{(x,y) \rightarrow (۲,۱)} (x - ۵y) = -۳$$

$$۴) \lim_{(x,y) \rightarrow (۱,۱)} (x^۲ + y^۲) = ۲$$

$$۵) \lim_{(x,y) \rightarrow (۲,۳)} (۴x^۲ - ۲y^۲) = -۲$$

$$۶) \lim_{(x,y) \rightarrow (۱,۱)} (۵x - y^۲) = ۴$$

$$۷) \lim_{(x,y) \rightarrow (۳,-۱)} (x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y) = -۴$$

$$۸) \lim_{(x,y) \rightarrow (۲,۴)} (x^۲ + ۲x - y) = ۴$$

– با ذکر دلیل در خصوص حد توابع زیر بحث کنید:

$$۹) \lim_{(x,y) \rightarrow (۱,۱)} \frac{x^۲ - y^۲}{x - y}$$

$$۱۰) \lim_{(x,y) \rightarrow (۲,-۲)} \frac{x^۳ + ۸y^۳}{x + ۲y}$$

$$۱۱) \lim_{(x,y) \rightarrow (۱,۱)} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{x - y}$$

$$۱۲) \lim_{(x,y) \rightarrow (۰,۱)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}{x}$$

$$۱۳) \lim_{(x,y) \rightarrow (۰,۰)} \frac{x^۴y}{(x^۶ + y^۲)^۲}$$

$$۱۴) \lim_{(x,y) \rightarrow (۰,۰)} \frac{x^۲}{x^۲ + y}$$

$$۱۵) \lim_{(x,y) \rightarrow (۰,۰)} \frac{x^۲y^۲}{x^۳ + y^۳}$$

$$۱۶) \lim_{(x,y) \rightarrow (۰,۰)} \frac{x^۴y^۴}{(x^۲ + y^۴)^۳}$$

$$۱۷) \lim_{(x,y) \rightarrow (۰,۰)} \frac{x^۲y^۲}{x^۲ + y^۲}$$

$$۱۸) \lim_{(x,y) \rightarrow (۰,۰)} \frac{x^۲y^۲}{x^۴ + y^۴}$$

$$۱۹) \lim_{(x,y) \rightarrow (۱,۲)} \frac{xy - ۲x - y + ۲}{x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴y + ۵}$$

$$۲۰) \lim_{(x,y) \rightarrow (۰,۰)} \frac{x^۲ - ۲xy + ۵y^۲}{۳x^۲ + ۴y^۲}$$

$$۲۱) \lim_{(x,y) \rightarrow (۰,۰)} \frac{x^۳ - x^۲ + xy^۲ - y^۳}{x^۲ + y^۲}$$

– در مورد پیوستگی توابع زیر بحث کنید:

$$۲۲) F(x, y) = \sqrt{x^۲ + y^۲ - ۱۶}$$

$$۲۳) F(x, y) = \ln(۲x - y + ۳)$$

$$۲۴) F(x, y) = \sqrt{xy} e^{\sqrt{x^۲ + ۲y^۲ - ۱}} ۲$$

$$۲۵) F(x, y) = \frac{xy}{x^۲ + y^۲}$$

$$۲۶) F(x, y, z) = \sqrt{xy} \ln z$$

$$۲۷) F(x, y, z) = \frac{۱}{x^۲ + y^۲ - z^۲}$$

$$۲۸) F(x, y) = \begin{cases} \frac{۲y^۲ - ۳xy}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} & (x, y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ & (x, y) = (۰, ۰) \end{cases}$$

$$۲۹) F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^۲ y^۲}{x^۲ + y^۲} & (x, y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ & (x, y) = (۰, ۰) \end{cases}$$

$$۳۰) F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^۲ y}{x^۲ + y^۲} & (x, y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ & (x, y) = (۰, ۰) \end{cases}$$

$$۳۱) F(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy\sqrt{z}}{x^۲ + y^۲ + z^{۲/۲}} & (x, y, z) \neq (۰, ۰, ۰) \\ ۰ & (x, y, z) = (۰, ۰, ۰) \end{cases}$$

– مشتقات جزئی توابع زیر را به دست آورید.

$$۳۲) F(x, y) = ۲x^۲ y^۲ - xy^۲ + ۳y + ۱$$

$$۳۳) F(x, y) = (x^۲ - y^۲)^۲$$

$$۳۴) F(x, y) = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

$$۳۵) F(x, y) = xe^y + y \sin x$$

$$۳۶) F(x, y) = e^x \ln xy$$

$$۳۷) F(x, y) = x \cos \frac{x}{y}$$

$$۳۸) F(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$۳۹) F(x, y, z) = x^۲ e^{۲y} \cos z$$

$$۴۰) F(x, y, z) = x^۲ \operatorname{tg} y + \sqrt{y} e^{z^۲} - z \cos ۲x$$

– نشان دهید توابع زیر در معادله $F_{xx} + F_{yy} = ۰$ صدق می کنند.

$$۴۱) F(x, y) = e^{-۲y} \cos ۲x$$

$$۴۲) F(x, y) = \ln \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

$$۴۳) F(x, y) = \operatorname{tg}^{-۱} \frac{y}{x}$$

اگر $w = F(x - y, y - x)$ نشان دهید $w_x + w_y = 0$.

اگر $w = F(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$ نشان دهید $w_x + w_y = 0$.

الف) اگر $F(x^3 - y^3, x^2 - z^2) = 0$ و z تابعی از x و y باشد نشان دهید عبارت زیر مقدار ثابتی می‌باشد:

$$(y^2 z) z_x + (x^2 z) z_y - x y^2 + 4$$

ب- اگر الف) $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ نشان دهید $x z_x + y z_y = z$.

ب) ثابت کنید $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ مختصات قطبی نقطه (x, y) است.

ج) ثابت کنید اگر
$$\begin{cases} x = e^s \cos t \\ y = e^s \sin t \end{cases}$$
 (در این صورت):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

د) اگر تابع ضمنی $z = z(x, y)$ از رابطه $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ به دست آید، نشان دهید که

این تابع در رابطه $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ صدق می‌کند.

ه) اگر تابع ضمنی $z = z(x, y)$ از رابطه $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ به دست آید، ثابت

کنید $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

– با استفاده از تغییر متغیر $\begin{cases} r = 3x + y \\ s = x + y \end{cases}$ ، رابطه $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ را به رابطه‌ای بر حسب s و r تبدیل کنید.

– فرض کنید $z = u(x, y)e^{ax+by}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. برای ثابت‌های a و b مقادیری بیابید که

$$\cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$$

– اگر $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$ و $z = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ ، ثابت کنید $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

– با استفاده از تغییر متغیر $\begin{cases} r = x - 2t \\ s = x + 2t \end{cases}$ ، رابطه $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را به رابطه‌ای بر حسب s و r تبدیل کنید.

– اگر تابع ضمنی $z = z(x, y)$ از رابطه $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ به دست آید، ثابت کنید

$$\cdot x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$$

– در مورد وجود یا عدم وجود حدود زیر بحث کنید:

$$۱) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^6 + 3y^6}$$

$$۲) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^3}$$

$$۳) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$۴) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x + y}$$

$$۵) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x \sin y - y \cos z}{|x| + |y| + |z|}$$

$$۶) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x - y)}{x - y}$$

$$۷) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 + \sin x}{y^2 - x^2}$$

$$۸) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{|y|^3 + |x|^3}$$

$$۹) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

– با استفاده از تعریف مشتقات جزئی $F_{xy}(0, 0)$ را برای تابع زیر محاسبه کنید:

$$F(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

– آیا تابع زیر در $(-1, 0)$ پیوسته است؟

$$F(x, y) = \begin{cases} xy \frac{xy + y}{x^2 + y^2 + 2x + 1} & (x, y) \neq (-1, 0) \\ 0 & (x, y) = (-1, 0) \end{cases}$$

– تابعی مثال بزنید که پیوسته نباشد اما مشتقات جزئی آن موجود باشند.

– ثابت کنید تابع $F(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x - y)}{|x| + |y|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ همه جا پیوسته است.

– اگر z تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y که در رابطه‌ی $2 \sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$ صدق

کند نشان دهید:

$$z_x + z_y = 1$$

– فرض کنید a و b ثابت هستند و $z = u(x, y)e^{ax+by}$ و همچنین می‌دانیم $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. مقادیر a و b

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} + z = 0$$

را طوری بیابید که

– اگر $F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cos x - y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ آن‌گاه $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$ و $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$ را به دست آورید.

- پیوستگی $F(x, y) = \begin{cases} (x, y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ را در مبدأ بررسی کنید.

- اگر z تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y باشد و همچنین $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$ را z_{xy} حساب کنید.

- فرض کنید p و m و n اعداد حقیقی باشند. چه شرایطی بر آن‌ها اعمال شود تا حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^n y^m}{|y|^p + |x|^p}$$

- دامنه پیوستگی را برای توابع زیر به دست آورید.

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\sqrt{}}}{x^{\sqrt{}} - y^{\sqrt{}}} & x \neq \pm y \\ 0 & x = \pm y \end{cases}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} \ln(1 - x^{\sqrt{}} - y^{\sqrt{}} - z^{\sqrt{}}) & x^{\sqrt{}} + y^{\sqrt{}} + z^{\sqrt{}} < 1 \\ 0 & x^{\sqrt{}} + y^{\sqrt{}} + z^{\sqrt{}} \geq 1 \end{cases}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^{\sqrt{}} + y^{\sqrt{}} + z^{\sqrt{}}} & x^{\sqrt{}} + y^{\sqrt{}} + z^{\sqrt{}} \neq 0 \\ 0 & x^{\sqrt{}} + y^{\sqrt{}} + z^{\sqrt{}} = 0 \end{cases}$$

- به ازای چه مقادیری از a تابع زیر در $(1, 0)$ پیوسته است.

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)y}{x^{\sqrt{}} + y^{\sqrt{}} - 2x + 1} & (x, y) \neq (1, 0) \\ a & (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

– وضعیت پیوستگی توابع زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\mathfrak{f}}y}{x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{f}}} & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases} \quad F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\mathfrak{f}}y}{x^{\mathfrak{f}} + y^{\mathfrak{f}}} & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}}}{|x|^{\mathfrak{r}} + |y|^{\mathfrak{r}}} & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases} \quad F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^{\mathfrak{r}}}{x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{f}}} & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\mathfrak{r}}y}{x^{\mathfrak{f}} + y^{\mathfrak{r}}e^x} & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases} \quad F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}}}{x^{\mathfrak{f}} + y^{\mathfrak{f}}} & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & xy \neq \circ \\ 1 & xy = \circ \end{cases} \quad F(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(y)}{x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}}} & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

$$F(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xz - y^{\mathfrak{r}}}{x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}} + z^{\mathfrak{r}}} & (x, y, z) \neq (\circ, \circ, \circ) \\ \circ & (x, y, z) = (\circ, \circ, \circ) \end{cases}$$

– در تابع $F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\mathfrak{r}}y - xy^{\mathfrak{r}}}{x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}}} & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases}$ مقادیر $\frac{\partial^{\mathfrak{r}}F}{\partial x^{\mathfrak{r}}}, \frac{\partial^{\mathfrak{r}}F}{\partial y^{\mathfrak{r}}}, \frac{\partial^{\mathfrak{r}}F}{\partial x \partial y}(\circ, \circ)$ و $\frac{\partial^{\mathfrak{r}}F}{\partial y \partial x}(\circ, \circ)$ را محاسبه کنید.