

مختصات قطبی

- معادله قطبی منحنی‌های زیر را بنویسید:

$$۱) x^۲ = ۳(y^۲ + ۱)$$

$$۲) x^۲ - y^۲ - ۲x = ۰$$

$$۳) (x^۲ + y^۲)^۲ = ۲(x^۲ - y^۲)$$

$$۴) xy = ۱$$

$$۵) y = ۳ - x$$

$$۶) x^۳ + y^۳ - ۳ay = ۰ \quad (a \in \mathbb{R})$$

- معادله دکارتی منحنی‌های زیر را بنویسید:

$$۷) r^۲ \sin ۲\theta = ۱$$

$$۸) r^۲ - \sin \theta = ۰$$

$$۹) r^۲ = ۳ \sin ۲\theta$$

$$۱۰) r \sin \theta + ۱ = ۰$$

$$۱۱) r = \frac{۳}{۱ - ۲ \cos \theta}$$

$$۱۲) \theta = \frac{\pi}{۴}$$

- نمودار معادلات قطبی زیر را رسم کنید:

$$۱۳) r = ۵$$

$$۱۴) r = ۲ - \cos \theta$$

$$۱۵) r = -۲ \cos \theta$$

$$۱۶) r = -۶(۱ + \cos \theta)$$

$$۱۷) r = -۲ \sin \theta$$

$$۱۸) r = ۴(۱ - \sin \theta)$$

$$۱۹) r = ۱ + ۲ \cos \theta$$

$$۲۰) r = ۲ + ۴ \sin \theta$$

$$۲۱) r^۲ = -۱۶ \sin ۲\theta$$

$$۲۲) r^۲ = ۹ \sin ۲\theta$$

$$۲۳) r = ۲ \sin ۴\theta$$

$$۲۴) r = ۸ \cos ۳\theta$$

$$۲۵) r = -۳ \sin ۵\theta$$

$$۲۶) r = ۴ \cos ۲\theta$$

$$۲۷) r = ۳ + ۶ \cos ۳\theta$$

$$۲۸) r = \sqrt{۳} + ۲ \sin ۲\theta$$

$$۲۹) r^۲ = ۱ + ۲ \sin ۳\theta$$

$$۳۰) r^۲ = ۹ \cos ۲\theta$$

$$۳۱) r = ۲ \cos^۲ \theta$$

$$۳۲) r = \frac{۱}{۱ - \cos \theta}$$

$$۳۳) r = \frac{۱}{۱ + \sin \theta}$$

$$۳۴) r^۲ = ۱ + \cos \theta$$

$$۳۵) r^۲ = ۱ + \sin ۲\theta$$

$$۳۶) r^۲ = \sin ۳\theta$$

$$۳۷) r = ۲ \cos \theta - ۱$$

$$۳۸) r = e^{\theta}$$

$$۳۹) r = ۱ - \cos ۲\theta$$

$$۴۰) r = \sqrt{۱ + \sin \theta}$$

$$۴۱) r^۲ = \cos ۲\theta$$

$$۴۲) r = \sin \theta + \cos \theta$$

$$۴۳) r = \tan \theta$$

$$۴۴) r = \frac{۱ - \cos \theta}{۱ + \sin \theta}$$

$$۴۵) r = \sin \theta - \cos \theta$$

- مساحت محدود به منحنی‌های زیر را به دست آورید:

$$۴۶) r = ۳ - ۳ \cos \theta$$

$$۴۷) r = ۲ + ۲ \sin \theta$$

$$۴۸) r = \sin ۲\theta$$

$$۴۹) r^۲ = ۹ \cos ۲\theta$$

$$۵۰) r = ۳ \sin \theta, \quad r = \sqrt{۳} \cos \theta$$

$$۵۱) r = ۱ + \sin \theta, \quad r = ۳ \sin \theta$$

$$۵۲) r = ۶ \cos \theta, \quad r = ۶ \sin \theta$$

$$۵۳) r^۲ = ۲ \cos ۲\theta, \quad r = ۱$$

$$۵۴) r^۲ = ۸ \cos ۲\theta$$

$$۵۵) r = ۲(۱ + \cos \theta)$$

$$۵۶) r = ۴ \sin^۲ \frac{\theta}{۲}$$

$$۵۷) r = ۴ \sin^۲ \theta \cos \theta$$

$$۵۸) r = \sin \theta \cos^۲ \theta$$

$$۵۹) r = \cos^۳ \theta$$

۶۰) مساحت خارج دلتمای $r = ۲ + ۲ \sin \theta$ و داخل دایره $r = ۳$ ؟

۶۱) مساحت خارج دایره $r = ۲$ و داخل پروانه $r^۲ = ۸ \sin ۲\theta$ ؟

۶۲) مساحت خارج دلتمای $r = ۱ - \cos \theta$ و داخل دایره $r = ۳ \cos \theta$ ؟

۶۳) مساحت ناحیه محصور به خارج از منحنی $\frac{(x^۲ + y^۲)^۲}{x^۲ - y^۲} = ۱$ و داخل منحنی $r = ۱ + \sin \theta$ ؟

۶۴) مساحت محدود به منحنی‌های $r = ۱ - \cos \theta$ و $r = ۴ \sin^۲ \frac{۱}{۲}\theta$ را به دست آورید.

۶۵) مساحت محدود به منحنی‌های $r = \cos ۲\theta$ و $r = \sin ۲\theta$ را به دست آورید.

۶۶) مساحت درون حلزونی $r = ۴ + ۲ \cos \theta$ را به دست آورید.

۶۷) مساحت درون دایره $r = -۲ \cos \theta$ و بیرون دایره $r = ۱$ را به دست آورید.

(۶۸) مساحت ناحیه مشترک بین دلواریهای $r = 1 + \cos \theta$ و $r = 1 - \cos \theta$ را به دست آورید.

(۶۹) مساحت درون یک پر از گل $r = \cos 2\theta$ را به دست آورید.

(۷۰) مساحت درون یک طوق از پروانه $r^2 = 4 \sin 2\theta$ را به دست آورید.

(۷۱) مساحت درون گل شش پر $r^2 = 4 \sin 3\theta$ را به دست آورید.

(۷۲) مساحت درون دایره $r = 6$ و بالای خط $r \sin \theta = 3$ را به دست آورید.

(۷۳) مساحت ناحیهی خارج از منحنی $x^2 - 3x + y^2 = 0$ و داخل منحنی $x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2 + y^2}$ را به دست آورید.

(۷۴) مطلوب است مساحت ناحیهی بین پیچهای اول و دوم $r = 3\theta$ را به دست آورید.

(۷۵) مساحت ناحیهی بین اولین پیچ $r = 2\theta$ و محور قطبی را به دست آورید.

(۷۶) مساحت ناحیه داخل منحنی اول و خارج منحنی دوم را به دست آورید:

$$A : \begin{cases} r = 2 \cos 3\theta \\ r = 1 \end{cases} \quad B : \begin{cases} r = 2 + \cos 2\theta \\ r = 2 + \sin \theta \end{cases}$$

$$C : \begin{cases} r^2 = 4 \sin 2\theta \\ r = \sqrt{2} \end{cases} \quad D : \begin{cases} r = 2 \sin \theta \\ r = 1 \end{cases}$$

– طول قوس منحنیهای زیر را به دست آورید:

$$(۷۷) r = e^{-\theta}$$

$$\theta = 0 \text{ تا } \theta = 2\pi$$

$$(۷۸) r = \theta$$

$$\theta = 0 \text{ تا } \theta = 4\pi$$

$$(۷۹) r = 2^\theta$$

$$\theta = 0 \text{ تا } \theta = \pi$$

$$(۸۰) r = 2 - 2 \cos \theta$$

$$(۸۱) r = \sin^2 \frac{1}{2} \theta$$

توابع برداری

۱- فرض کنید ذره‌ای بر کره‌ای به مرکز مبدأ چنان حرکت می‌کند که بردار مکانش مشتق‌پذیر باشد. اگر

$R(t)$ نشان دهنده‌ی بردار مکان ذره باشد نشان دهید $R(t)$ بر $\frac{dR}{dt}$ عمود است.

۲- نمایش طبیعی تابع برداری زیر را به دست آورید:

$$R(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

۳- نشان دهید طول n دور مارپیچ $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ از رابطه‌ی $2n\pi\sqrt{a^2 + b^2}$ حاصل می‌شود.

۴- بردارهای یک‌ه مماس، قائم اصلی و قائم دوم (T, N, B) را برای منحنی‌های زیر در نقاط داده شده به دست آورید.

$$R(t) = (\cosh t, \sinh t, t) \quad t = 0 \quad \bullet$$

$$R(t) = (e^t \cos t, e^t \sinh t, e^t) \quad t = \frac{\pi}{4} \quad \bullet$$

۵- فرض کنید c یک مکعب پیچ خورده $z = \frac{1}{4}t^2, x = t, y = \frac{1}{4}t^2$ باشد. انحنای ماکسیمم c را بیابید.

۶) نقاطی را بیابید که در آن انحنای بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ماکسیمم یا مینیمم شود.

۷) تاب منحنی $R(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ را به دست آورید.

۸) نشان دهید $R(t) = (t^2, 1 - 3t, 4t - 2)$ در یک صفحه قرار دارد.

۹) اگر c فصل مشترک رویه‌های $z = x^2 + y^2$ و $z = 2$ باشد. انحنای و تاب c را به دست آورید.

۱۰) منحنی فصل مشترک دو رویه $1 = y\sqrt{3} + z$ و $4 = x^2 + 4y^2$ را در نظر بگیرید. طول قوس خم، کنج فرنی، انحنای و تاب خم را به دست آورید.

۱۱) اگر c فصل مشترک دو رویه $1 = y - x$ و $2z = (y - 1)^2$ باشد. آن‌گاه انحنای، تاب، بردار یک‌ه مماس، قائم و قائم دوم را برای c حساب کنید.

(۱۲) معادله‌ی دایره بوسان $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ در نقطه‌ی $(0, 1)$ را به دست آورید.

(۱۳) معادله‌ی دایره انحنا $y = x^2 - \sin x$ در نقطه‌ی $(0, 0)$ را به دست آورید.

(۱۴) در چه نقاطی خطوط مماس بر خم C با معادلات پارامتری $x = t, y = t^2, z = t^3$ با صفحه‌ی $x + 2y + z - 1 = 0$ موازی هستند؟

(۱۵) انحنا و تاب منحنی $R(t) = (t + \cos t, t - \cos t, \sqrt{2} \sin t)$ را در $t = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید.

(۱۶) معادله‌ی دایره بوسان بیضی $9x^2 + 4y^2 = 36$ در نقطه‌ی $(0, 3)$ را به دست آورید.

(۱۷) نشان دهید منحنی $R(t) = (-t^2 + 1, 2t^2 - 2, t^3)$ مسطح است.

(۱۸) طول منحنی $R(t) = (e^t \cos t, e^t \sinh t, e^t)$ را در فاصله‌ی $(0, \frac{\pi}{4})$ به دست آورید.

(۱۹) معادله‌ی صفحه بوسان و قائم منحنی $R(t) = (t + \frac{1}{3}t^3, t - \frac{1}{3}t^3, t^2)$ را در نقطه‌ی $t = -1$ به دست آورید.

(۲۰) نشان دهید شعاع انحنا یک منحنی در مختصات قطبی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'r'' - rr''^2|}$$

(۲۱) خم C که محل تلاقی رویه‌ی $x^2 + y^2 = 5$ با صفحه $z = x$ است را در نظر بگیرید انحنا آن را در نقطه‌ی $p = (1, 2, 1)$ حساب کنید.

(۲۲) برای منحنی فضایی $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}t)\vec{i} + (\ln t)\vec{j} + (\frac{1}{4}t^2)\vec{k}$ انحنا و تاب را به ازای $t = 1$ به دست آورید.

(۲۳) معادله دایره بوسان بر منحنی $xy = 1$ در نقطه‌ی $(1, 1)$ را به دست آورید.

۲۴- برای منحنی فضایی $\vec{r}(t) = (\sin t)\vec{i} + (\sqrt{2} \cos t)\vec{j} + (\sin t)\vec{k}$

الف) طول منحنی را از $t = 0$ تا $t = \frac{\pi}{4}$ بیابید.

ب) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان در $t = \frac{\pi}{4}$ را به دست آورید.

(۲۵) اگر $\vec{r}(t) = (a \cos \omega t)\vec{i} + (a \sin \omega t)\vec{j} + b\omega\vec{k}$ ($0 < b, a$) بردار مکان ذره‌ای در فضا باشد، نشان

دهید که این منحنی دارای انحنا ثابت $k = \frac{a}{a^2 + b^2}$ است.

(۲۶) منحنی C با معادلات پارامتری $z(t) = t + t^2$ و $y(t) = 2t + 4$ و $x(t) = t - t^2$ مفروض است.

نقطه‌ای از منحنی را تعیین کنید که بیشترین انحنا را داشته باشد.

(۲۷) منحنی $\vec{r}(\theta) = \left[\int_0^\theta \cos\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)dt \right] \vec{i} + \left[\int_0^\theta \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)dt \right] \vec{j}$ مفروض است مطلوب است انحنا منحنی در هر نقطه.

(۲۸) مطلوب است معادله صفحه‌ی بوسان منحنی $r(t) = (\cos at)\vec{i} + (\sin at)\vec{j} + bt\vec{k}$ در $t = 0$.

(۲۹) نشان دهید اگر خم $r(t)$ در صفحه باشد آن گاه تاب آن صفر است.

(۳۰) انحنای خم $y = \ln x$ را در نقطه‌ی $(1, 0)$ به دست آورید.

(۳۱) مینیم شعاع انحنا منحنی $y = e^x$ را به دست آورید.

(۳۲) برای منحنی $r(t) = \left[\int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)dx \right] \vec{i} + \left[\int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)dx \right] \vec{j} + (\sqrt{4}t)\vec{k}$ مطلوب است بردارهای $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ در $t = 0$.

(۳۳) برای منحنی $y = e^x$ معادله‌ی دایره‌ی بوسان را در نقطه $(0, 1)$ به دست آورید.

(۳۴) برای خم C با معادله پارامتری $r(t) = (2t)\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j}$ معادله دایره بوسان را در $t = 1$ به دست آورید.

(۳۵) انحنا و تاب منحنی $\begin{cases} r = \theta \\ z = r^2 \end{cases}$ را در نقطه $\theta = 0$ به دست آورید.