فصل چهارم:

معادلات صفحه مماس و خط قائم بر رویه‌های زیر را بنویسید:

۱)$۴x^۲ - y^۲ + ۳z^۲ = ۱۰,$	$p(۲, -۳, ۱)$
۲)$۹x^۲ - ۴y^۲ - ۲۵z^۲ = ۴۰,$	$p(۴, ۱, -۲)$
۳)$z = ۴x^۲ + ۹y^۲,$	$p(-۲, -۱, ۲۵)$
۴)$z = ۴x^۲ - y^۲,$	$p(۵, -۸, ۳۶)$
۵)$z = ۲e^{-x}\cos y,$	$p(۰, \frac{\pi}{۳}, ۱)$
۶)$xyz - ۴xz^۳ + y^۳ = ۱۰,$	$p(-۱, ۲, ۱)$

در تمرین‌های زیر مشتق سویی f را در نقطه و جهت داده شده به دست آورید:

۷)$f(x,y) = x^۲ - ۵xy + ۳y^۲,$	$p(۳, -۱),$	$u = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})(i+j)$
۸)$f(x,y) = x^۳ - ۳x^۲y - y^۳,$	$p(۱, -۲),$	$u = (\frac{۱}{۲})(-i + \sqrt{۳}j)$
۹)$f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x}),$	$p(۴, -۴),$	$a = ۲i - ۳j$
۱۰)$f(x,y) = x^۲ \ln y,$	$p(۵, ۱),$	$a = -i + ۴j$
۱۱)$f(x,y) = \sqrt{۹x^۲ - ۴y^۲ - ۱},$	$p(۳, -۲),$	$a = i + ۵j$
۱۲)$f(x,y,z) = z^۲ e^{xy},$	$p(-۱, ۲, ۳)$	$a = ۳i + j - ۵k$
۱۳)$f(x,y,z) = \sqrt{xy}\sin z,$	$p(۴, ۹, \frac{\pi}{۴}),$	$a = ۲i + ۳j - ۲k$
۱۴)$f(x,y,z) = z^۲ \tan^{-۱}(x+y),$	$p(۰, ۰, ۴),$	$a = -۳i + k$

۱۵) مطلوبست مشتق تابع $z = x^۳ + x^۲y - ۲xy^۲ + ۳$ در نقطه $A(۲, ۱)$ در امتداد این نقطه تا نقطه

$B(۵,۳)$.

۱۶) مطلوبست مشتق تابع $f = x^۲ + ۳z^۲y - xyz + ۱$ در نقطه $A(۲,-۱,۱)$ در امتداد برداری که با همه محورهای مختصات زوایای مساوی می‌سازد.

۱۷) مشتق سوئی $f(x,y) = x^۲ + ۲xy - y^۲$ در جهت برداری که با محور x، زاویه $\frac{۵\pi}{۶}$ می‌سازد در نقطه $(۲,-۳)$ به دست آورید.

۱۸) مشتق سوئی $f(x,y) = (xy + y^۲)^۴$ در جهت برداری که با محور x، زاویه $\frac{\pi}{۳}$ می‌سازد در نقطه $(۲,-۱)$ به دست آورید.

۱۹) اگر $f(x,y) = e^{۲xy}$ باشد در چه جهتی مشتق در نقطه $(۱,۱)$ برابر صفر می‌شود؟

۲۰) اگر $f(x,y) = \frac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲}$ باشد در چه جهتی مشتق در نقطه $(۱,۱)$ برابر صفر می‌شود و در چه جهتی از این نقطه، مشتق ماکزیمم و در چه جهتی مینیمم می‌باشد.

۲۱) به فرض آنکه $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^۳}{x^۳ + y^۳}, & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$، مشتق سوئی f در نقطه $(۱,۱)$ در امتداد مماس بر منحنی C به معادلات پارامتری $\begin{cases} x = \sqrt{۲}\cos t \\ y = \sqrt{۲}\sin t \end{cases}$ $f(x,y) =$ را بیابید.

ـ اکسترمم‌های نسبی توابع زیر را بیابید:

۲۲) $f(x,y) = x^۲ + ۲xy + ۳y^۲$

۲۳) $f(x,y) = x^۳ + ۳xy - y^۳$

۲۴) $f(x,y) = x^۲ - ۳xy - y^۲ + ۲y - ۶x$

۲۵) $f(x,y) = x^۴ + y^۳ + ۳۲x - ۹y$

۲۶) $f(x,y) = \cos x + \sin x$

۲۷) $f(x,y) = e^x \sin y$

۲۸) $f(x,y) = \dfrac{۴y + x^۲y^۲ + ۸x}{xy}$

۲۹) $f(x,y) = \dfrac{(x+y+۱)^۲}{x^۲+y^۲+۱}$

۳۰) $f(x,y,z) = ۲x^۲ + ۴xy - ۳y^۲ - ۲۰x + z^۲ + ۵z$

۳۱) $f(x,y,z) = ۳xy + xz - ۶x + ۱۰y + ۴yz - \left(\frac{۱}{۲}\right)z^۲$

۳۲) کوتاهترین فاصله بین دو صفحه $۲x + ۳y - z = ۲$ و $۲x + ۳y - z = ۴$ را به دست آورید.

۳۳) سه عدد مثبت پیدا کنید که جمع آنها برابر ۱۰۰۰ و حاصلضرب آنها ماکزیمم باشد.

۳۴)کوتاهترین فاصله رویه $xy^۳z^۲ = ۱۶$ تا مبداء را بیابید.

۳۵) کمترین و بیشترین فاصله بین مبداء و نقطه‌ای روی بیضی $x^۲ + ۴y^۲ = ۱۶$ را به دست آورید.

۳۶) کمترین و بیشترین فاصله بین مبداء و نقطه ای واقع بر بیضیوار $۹x^۲ + ۴y^۲ + z^۲ = ۳۶$ را به دست آورید.

ـ اکسترمم‌های مطلق توابع زیر را بیابید:

۳۷) $f(x,y) = x^۲ - ۳xy - y^۲ + ۲y - ۶x \qquad R = \{(x,y) \mid |x| \le ۳, |y| \le ۲\}$

۳۸) $f(x,y) = x^۲ + ۲xy + ۳y^۲ \qquad R = \{(x,y) \mid -۲ \le x \le ۴, -۱ \le y \le ۳\}$

۳۹) $f(x,y) = x^۳ + ۳xy - y^۳$

R مثلثی است با رئوس $A(۱,۲)$ و $B(۱,-۲)$ و $C(-۱,-۲)$.

۴۰) $f(x,y) = ۴x^۳ - ۲x^۲y + y^۲$

R ناحیه محدود شده به $y = x^۲$ و $y = ۹$.

۴۱) $f(x, y) = ۵ + ۴x - ۲x^۲ + ۳y - y^۲$

R مثلثی است محدود به خطوط $y = x$ و $y = -x$ و $y = ۲$.

۴۲) $f(x, y) = x^۲ + ۴y^۲ - x + ۲y$

R ناحیه محدود شده به بیضی $x^۲ + ۴y^۲ = ۱$ می‌باشد.

ـ اکسترمم‌های تابع f را روی رویه داده شده به دست آورید:

۴۳)	$f = xyz$	با قید	$x^۲ + ۴y^۲ + ۲z^۲ = ۸$
۴۴)	$f = ۲۵ - x^۲ - y^۲$	با قید	$x^۲ + y^۲ - ۴y = ۰$
۴۵)	$f = ۴x^۲ + ۲y^۲ + ۵$	با قید	$x^۲ + y^۲ - ۲y = ۰$
۴۶)	$f = x^۲ + y^۲ + z^۲$	با قید	$۳x - ۲y + z - ۴ = ۰$
۴۷)	$f = xyz$	با قید	$x^۲ + ۲y^۲ + ۴z^۲ = ۴$
۴۸)	$f = ۴x^۲ + y^۲ - ۴xy$	با قید	$x^۲ + y^۲ = ۱$
۴۹)	$f = ۲x^۲ - y^۲ + xy + y$	با قید	$۲x + ۳y = ۱$
۵۰)	$f = x + y + z$	با قید	$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲۵$
۵۱)	$f = x^۲ + y^۲ + z^۲$	با قید	$x + y + z = ۲۵$
۵۲)	$f = ۴x^۲ + y^۲ + z^۲$	با دو قید	$۲x - y + z = ۴$ و $x + ۲y - z = ۱$

۵۳) $f = x^۳ + y^۳ + z^۳$ با دو قید $x + y + z = ۴$ و $x - y - z = ۳$

۵۴) $f = z - x^۲ - y^۲$ با دو قید $x^۲ + y^۲ = ۴$ و $x + y + z = ۱$

۵۵) $f = x^۲ + y^۲ + z^۲$ با دو قید $x - y = ۱$ و $y^۲ - z^۲ = ۰$

تمرین‌های فصل پنجم

ثابت کنید $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$ اگر:

۱) $f(x,y) = ۱۲xy^۲ - ۸x^۳$ و $d = ۲$ و $c = -۱$ و $b = ۲$ و $a = ۱$

۲) $f(x,y) = ۴xy^۳ + y$ و $d = ۳$ و $c = ۰$ و $b = -۱$ و $a = -۲$

۳) $f(x,y) = x^۳y - ۵y^۲$ و $d = ۴$ و $c = -۳$ و $b = ۵$ و $a = ۰$

۴) $f(x,y) = ۲x + ۳y^۲ - ۸$ و $d = ۲$ و $c = -۱$ و $b = ۲$ و $a = ۱$

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید و در هر مورد ناحیه‌ای را رسم کنید که انتگرال روی آن محاسبه شود.

۵) $\int_۱^۲ \int_{۱-x}^{\sqrt{x}} x^۲ y dydx$

۶) $\int_۰^۲ \int_{y^۲}^{۲y} (۴x - y)dydx$

۷) $\int_۱^e \int_۰^x \ln x dydx$

۸) $\int_۱^۲ \int_{x^۳}^{x} e^{\frac{y}{x}} dydx$

۹) $\int_{-۱}^۱ \int_{x^۳}^{x+۱} (۳x + ۲y)dydx$

۱۰) $\int_۰^۱ \int_y^۱ \frac{۱}{۱+y^۲} dydx$

۱۱) $\int_۰^۱ \int_{-y-۱}^{y-۱} (x^۲ + y^۲)dydx$

۱۲) $\int_۰^{\frac{\pi}{۶}} \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (x\cos y - y\cos x)dydx$

ـ ناحیه R که بوسیله منحنی‌های زیر مشخص شده است رسم و سپس حدود $\iint_R f(x,y)dA$ را روی ناحیه مشخص شده پیدا کنید.

۱۳) $y = \sqrt{x}\ ,\ x = ۴\ ,\ y = ۰$

۱۴) $y = x^۳\ ,\ x = ۰\ ,\ y = ۸$

۱۵) $y = \sqrt{x}\ ,\ y = x^۳$

۱۶) $y = \sqrt{۱ - x^۲}\ ,\ y = ۰$

۱۷) $y = \sqrt{x}\ ,\ x = ۰\ ,\ y = ۲$

۱۸) $y = x^۳\ ,\ x = ۲\ ,\ y = ۰$

ـ از تابع $f(x,y)$ روی ناحیه مفروض انتگرال بگیرید:

۱۹) $f(x,y)=y+۲x$ روی ناحیه مستطیلی R با رئوس $A(-۱,-۱)$ و $B(۲,-۱)$ و $c(۲,۴)$ و $D(-۱,۴)$.

۲۰) $f(x,y)=xy$ روی ناحیه مثلثی R با رئوس $A(۲,۹)$ و $B(۲,۱)$ و $c(۲,۱)$.

۲۱) $f(x,y)=xy^۲$ روی ناحیه مثلثی R با رئوس $A(۰,۰)$ و $B(۳,۱)$ و $C(۲,۱)$.

۲۲) $f(x,y)=y+۱$ ناحیه R محدود شده به منحنی های $y=\sin x$ و $y=\cos x$ از $x=۰$ تا $x=\frac{\pi}{۴}$.

۲۳) $f(x,y)=x^۳\cos xy$ ناحیه R محدود شده به منحنی های $y=x^۲$ و $y=۰$ و $x=۲$.

۲۴) $f(x,y)=y\cos xy$ ناحیه R محدود شده به مستطیل $۰\le x\le \pi$ و $۰\le y\le ۱$.

ـ ابتدا ترتیب انتگرالگیری را عوض و سپس انتگرال بگیرید:

۲۵) $\int_۰^۱\int_{۲x}^۲ e^{y^۲}dydx$

۲۶) $\int_۰^۲\int_{y^۲}^۴ y\cos x^۲dxdy$

۲۷) $\int_۰^۹\int_{\sqrt{y}}^۳ \sin x^۳dxdy$

۲۸) $\int_۱^e\int_۰^{\ln x} ydydx$

۲۹) $\int_۰^۸\int_{\sqrt[۳]{y}}^۲ \frac{y}{\sqrt{۱۶+x^۲}}dxdy$

۳۰) $\int_۰^۱\int_x^۱ \frac{۱}{y}\sin y\cos\frac{x}{y}dydx$

۳۱) $\int_۰^۱\int_y^۱ e^{\frac{y}{x}}dxdy$

۳۲) $\int_۰^{۲۷}\int_{y^{\frac{۲}{۳}}}^۹ y\cos x^۴dxdy$

۳۳) $\int_۰^۱\int_{e^y}^e \frac{dxdy}{\ln x}$

۳۴) $\int_۰^۱\int_۰^{\arccos y} e^{\sin x}dxdy$

۳۵) $\int_۰^{\sqrt{\frac{\pi}{۲}}}\int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{۲}}} y^۲\sin x^۲dxdy$

۳۶) $\int_۰^۹\int_{\sqrt{x}}^۳ \frac{x}{y^۳}e^{y^۲}dydx$

ـ ناحیه مشخص شده بوسیله معادلات زیر را رسم نمائید و مساحت ناحیه را به کمک انتگرال دوگانه به دست آورید:

۳۷) $y=\frac{۱}{x^۲},\qquad y=-x^۲,\qquad x=۱,\qquad x=۲$

۳۸) $y=\sqrt{x}$, $y=-x$, $x=۴$, $x=۱$

۳۹) $y=x^۳$, $x=۲$, $y=۰$,

۴۰) $x=y^۲$, $y-x=۲$, $y=-۲$, $y=۳$

۳۷) $y=\frac{۱}{x^۲}$, $y=-x^۲$, $x=۱$, $x=۲$

۴۱) $y^۲=-x$, $x-y=۴$, $y=-۱$, $y=۲$

۴۲) $y=x$, $y=۳x$, $x+y=۴$,

۴۳) $x-y+۱=۰$, $۷x-y-۱۷=۰$, $۲x+y+۲=۰$

۴۴) $y=e^x$, $y=\sin x$, $x=\pi$, $x=-\pi$

۴۵) $y=x^۲$, $y=\frac{۱}{۱+x^۲}$

۴۶) حجم جسمی را بیابید که زیر سهمیگون $z=۴x^۲+y^۲$ و بالای ناحیه R در صفحه xy که محدود شده به مستطیلی با رئوس $(۰,۰,۰)$ و $(۰,۱,۰)$ و $(۲,۰,۰)$ و $(۲,۱,۰)$.

۴۷) حجم جسمی را بیابید که زیر سهمیگون $z=۴x^۲+y^۲$ و بالای ناحیه R در صفحه xy که محدود شده به مثلثی با رئوس $(۰,۰,۰)$ و $(۱,۰,۰)$ و $(۱,۲,۰)$.

ـ حجم جسمی را بیابید که در یک هشتم اول واقع است و به منحنی‌های زیر محدود می‌باشد.

۴۸) $x^۲+z^۲=۹$, $y=۲x$, $y=۰$, $z=۰$

۴۹) $z=۴-x^۲$, $x+y=۲$, $x=۰$, $y=۰$, $z=۰$

۵۰) $۲x+y+z=۴$, $x=۰$, $y=۰$, $z=۰$

۵۱) $y^۲=x$, $y=x$, $x=۴$, $z=۰$

۵۲) $z = x^۲ + y^۲,\qquad y = ۴ - x^۲,\qquad x = ۰,\qquad y = ۰,\qquad z = ۰$

۵۳) $x^۲ + y^۲ = ۱۶,\qquad x = z,\qquad y = ۰,\qquad z = ۰$

۵۴) $z = ۴ - x - y,\qquad x = ۰,\qquad y = ۰,\qquad z = ۰$

۵۵) حجم زیر سهمیوار $z = x^۲ + y^۲$ و بالای ناحیه خاصی چون R در صفحه xy عبارت است است از

$$V = \int_۰^۱ \int_۰^y (x^۲ + y^۲)dxdy + \int_۱^۲ \int_۰^{۲-y} (x^۲ + y^۲)dxdy$$

ابتدا ناحیه را رسم کنید و سپس حجم را بصورت یک انتگرال مکرر با ترتیب انتگرالگیری معکوس به دست آورید.

ـ مطلوبست مرکز جرم و شعاع چرخش حول محورهای مختصات و مبداء ورقه نازکی که محدود به ناحیه‌های مشخص شده زیر با چگالی داده شده می‌باشد:

۵۶) $y = \sqrt{x}\ ,\ x = ۹\ ,\ y = ۰\ ,\qquad \rho(x,y) = x + y$

۵۷) $y = \sqrt[۳]{x}\ ,\ x = ۸\ ,\ y = ۰\ ,\qquad \rho(x,y) = y^۲$

۵۸) $y = x^۳\ ,\ y = ۲x\ ,\qquad \rho(x,y) = ky$

۵۹) $y = \ln x\ ,\ x = ۲\ ,\ y = ۰\ ,\qquad \rho(x,y) = \frac{۱}{x}$

۶۰) $y = x\ ,\ y = ۲ - x\ ,\qquad \rho(x,y) = ۶x + ۳y + ۳$

۶۱) $y = x\ ,\ y = -x\ ,\ y = ۱\ ,\qquad \rho(x,y) = y + ۱$

۶۲) $x = y - y^۲\ ,\ x + y = ۰\ ,\qquad \rho(x,y) = x + y$

۶۳) $y = \sin x\ ,\ x = ۰\ ,\ x = \pi\ ,\ y = ۰\ ,\qquad \rho(x,y) = y$

۶۴) $x = ۰\ ,\ x = ۲\ ,\ y = ۱\ ,\ y = -۱\ ,$ $\qquad \rho(x,y) = ۱ + \frac{x}{۲۰}$

۶۵) $y = e^{-x^۲}\ ,\ x = -۱\ ,\ x = ۱\ ,\ y = ۰\ ,$ $\qquad \rho(x,y) = |xy|$

۶۶) مطلوبست مرکز جرم ورقه نازکی با چگالی $\rho(x,y) = ۳$ که در ربع اول واقع و به خطوط $x = ۰$ و $y = x$ و سهمی $y = ۲ - x^۲$ محدود است.

۶۷) سهمی $x = ۴y^۲$ بیضی $x^۲ + ۴y^۲ = ۱۲$ را قطع می‌کند و دو ناحیه جواب به وجود می‌آورد ورقه نازکی با چگالی $\rho(x,y) = ۵x$ ناحیه کوچکتر را اشغال کرده است ، جرم آن را بیابید.

۶۸) مرکز جرم ناحیه‌ای واقع در ربع اول را بیابید که به محور x، سهمی $y^۲ = ۲x$ و خط $x + y = ۴$ محدود است.

۶۹) مطلوبست مرکز جرم وگشتاورهای ماند و شعاع‌های چرخش یک ورقه نازک، حول محورهای مختصات با چگالی $\rho(x,y) = ۶۰$ که از راست به سهمی $y^۲ + x = ۰$ و از چپ به خط $y = x + ۲$ محدود است.

ـ در هریک از تمرین‌های زیر ناحیه انتگرالگیری را رسم و سپس حاصل انتگرال را به دست آورید:

۷۰) $\int_{۱}^{\pi}\int_{۰}^{۲}(r\sin\theta)rdrd\theta$ $\qquad$ ۷۱) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۰}^{۳}(\sin\theta\cos\theta)rdrd\theta$

۷۲) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{۱+\sin\theta}(\cos\theta)rdrd\theta$ $\qquad$ ۷۳) $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۵\pi}{۶}}\int_{۱}^{۲\sin\theta}\sin\theta drd\theta$

۷۴) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۲\sin\theta}^{۲}(\sin\theta)rdrd\theta$ $\qquad$ ۷۵) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۰}^{۲\sin ۲\theta}\cos ۲\theta drd\theta$

ـ با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت ناحیه مشخص شده را بیابید:

۷۶) یک برگ از $r = ۴\sin ۳\theta$

۷۷) یک برگ از $r = ۲\cos ۴\theta$

۷۸) $r = ۳ + ۲\sin\theta$

۷۹) $r = ۴ + ۸\cos\theta$

۸۰) داخل دلنمای $r = ۲ - ۲\cos\theta$ و خارج دایره $r = ۳$.

۸۱) خارج دلنمای $r = ۱ + \sin\theta$ و داخل دایره $r = ۳\sin\theta$.

ـ در هریک از تمرین‌های زیر ناحیه انتگرالگیری را رسم و سپس به کمک مختصات قطبی حاصل انتگرال‌ها را به دست آورید.

۸۲) $\iint\limits_D (x^۲ + y^۲)^{\frac{۳}{۲}} dA$ که R محدود شده به دایره $x^۲ + y^۲ = ۴$.

۸۳) $\iint\limits_D x^۲(x^۲ + y^۲)^۳ dA$ که R محدود شده به دایره $y = \sqrt{۱ - x^۲}$ و $y = ۰$.

۸۴) $\iint\limits_R \frac{x^۲}{x^۲+y^۲} dA$ که R محدود شده به دو دایره $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و $x^۲ + y^۲ = b^۲$ با $۰ < a < b$.

۸۵) $\iint\limits_R (x^۲ + y^۲) dA$ که R محدود شده به $(x^۲ + y^۲)^۲ = x^۲ - y^۲$.

ـ انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

۸۶) $\int_{-a}^{a} \int_{۰}^{\sqrt{a^۲-x^۲}} e^{-(x^۲+y^۲)} dydx$

۸۷) $\int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{\sqrt{۱-x^۲}} e^{\sqrt{x^۲+y^۲}} dydx$

۸۸) $\int_{۰}^{۲} \int_{۰}^{\sqrt{۴-y^۲}} \cos(x^۲ + y^۲) dxdy$

۸۹) $\int_{۱}^{۲} \int_{۰}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} dydx$

۹۰) مطلوبست حجم جسمی که بین دو رویه زیر قرار گرفته است.

$$z = ۴ - x^۲ - y^۲ \quad , \quad z = x^۲ + y^۲$$

۹۱) ورقه نازکی با چگالی $\rho(x, y) = ۱$ به دلنمای $r = ۱ + \cos\theta$ محدود ا ست، گشتاور ماند این ورقه را حول مبداء بیابید.

۹۲) ورقه نازکی با چگالی $\rho(x,y)=1$ محدود به درون دلنمای $r=1+\cos\theta$ و بیرون دایره $r=1$ می باشد، مرکز جرم و شعاع چرخش حول محورهای مختصات و مبداء را بیابید.

۹۳) حجم استوانه‌ای را بیابید که قاعده پایین آن محدود به ناحیه‌ای است که در درون دلنمای $r=1+\cos\theta$ و بیرون دایره $r=1$ و قاعده بالای آن در صفحه $z=x$ قرار دارد

۹۴) حجم بین کره $x^2+y^2+z^2=64$ با استوانه $x^2+(y-4)^2=16$ را پیدا کنید.

۹۵) انتگرال دوگانه $\iint\limits_R (y-x)dA$ روی ناحیه R که محدود شده به $y=2x$ و $y=0$ و $x=2$ با تغییر متغیرهای $x=u+v$ و $y=2v$ به دست آورید.

۹۶) انتگرال دوگانه $\iint\limits_R (3x-4y)dA$ روی ناحیه R که محدود شده به $y=3x$ و $2y=x$ و $x=4$ با تغییر متغیرهای $x=u-2v$ و $y=3u-v$ به دست آورید.

۹۷) انتگرال دوگانه $\iint\limits_R \left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2\right)dA$ روی ناحیه R که محدود شده به $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2\leq 1$ با تغییر متغیرهای $x=2u$ و $y=3v$ به دست آورید.

۹۸) انتگرال دوگانه $\iint\limits_R xydA$ روی ناحیه R که محدود شده به $y=2\sqrt{1-x}$ و $y=0$ و $y=x$ با تغییر متغیرهای $x=u^2-v^2$ و $y=2uv$ به دست آورید.

۹۹) انتگرال دوگانه $\iint\limits_R (x^2+2y^2)dA$ روی ناحیه R که محدود شده به $xy=1$ و $xy=2$ و $y=2x$ و $y=x$ با تغییر متغیرهای $x=\dfrac{u}{v}$ و $y=v$ به دست آورید.

۱۰۰) انتگرال دوگانه $\iint\limits_R \dfrac{2y+x}{y-2x}dA$ روی ناحیه R که محدود شده به یک چهار ضلعی به رئوس $(-1,0)$ و $(-2,0)$ و $(0,4)$ و $(0,2)$ با تغییر متغیرهای $u=y-2x$ و $v=2y+x$ به دست آورید.

۱۰۱) انتگرال دوگانه $\iint\limits_R \frac{x^۲ \sin xy}{y} dA$ روی ناحیه R که محدود شده به $x^۲ = \pi y$ و $y^۲ = x$ و $yx^۲ = \frac{\pi}{۲}$ و $y^۲ = \frac{x}{y}$ به دست آورید.

۱۰۲) انتگرال دوگانه $\iint\limits_R \sin\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$ روی ناحیه که محدود شده به چهارضلعی به رئوس $A(۱,۰)$ و $B(۲,۰)$ و $C(۰,۲)$ و $D(۰,۱)$ به دست آورید.

۱۰۳) انتگرال دوگانه $\iint\limits_R (x-y)^۲ \sin^۲(x+y) dA$ روی ناحیه R که محدود شده به چهارضلعی به رئوس $A(\pi,۰)$ و $B(۲\pi,\pi)$ و $C(\pi,۲\pi)$ و $D(۰,\pi)$ به دست آورید.

۱۰۴) انتگرال دوگانه $\iint\limits_R e^{x+y} dA$ روی ناحیه R که محدود شده به $|x|+|y| \leq ۴$ با تغییر متغیرهای $u = x+y$ و $v = x-y$ به دست آورید.

۱۰۵) مطلوبست مساحت محدود به منحنی $\left(\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹}\right)^۲ = \frac{x^۲}{۴} - \frac{y^۲}{۹}$.

۱۰۶) مطلوبست حجم بیضیگون به معادله $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$.

۱۰۷) حجم محدود به سطوح $z = x+y$ و $xy = ۱$ و $xy = ۲$ و $y = x$ و $y = ۲x$ و $z = ۰$ واقع در ربع اول را بیابید.

۱۰۸) سطح محصور بین $xy = ۲$ و $xy = ۴$ و $xy^۳ = ۳$ و $xy^۳ = ۶$ را بیابید.

۱۰۹) مساحت بیضی به معادله $(۴x-y)^۲ + (۲x+۲y-۷)^۲ = ۱۰۰$ را بیابید.

ـ انتگرال‌های زیر را محاسبه نمایید:

$$۱)\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{z^{۲}}\int_{x+z}^{x-z} z\,dy\,dx\,dz \qquad ۲)\int_{-۱}^{۲}\int_{۱}^{x^{۲}}\int_{۰}^{x+y} ۲x^{۲}y\,dz\,dy\,dx$$

$$۳)\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{\pi} y\sin z\,dx\,dy\,dz \qquad ۴)\int_{۲}^{۳}\int_{۰}^{۳y}\int_{۱}^{yz} (۲x+y+z)\,dx\,dz\,dy$$

$$۵)\int_{-۱}^{۱}\int_{-۱}^{۱}\int_{-۱}^{۱} (x+y+z)\,dy\,dx\,dz \qquad ۶)\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-x}\int_{۴x^{۲}}^{۵-x^{۲}} (x-y+۱)\,dz\,dy\,dx$$

ـ حجم اجسامی که توسط منحنی‌های زیر به وجود می‌آیند به دست آورید:

$$۷) z+x^{۲}=۴\ ,\ y+z=۴\ ,\ y=۰\ ,\ z=۰$$

$$۸) z^{۲}+x^{۲}=۴\ ,\ y^{۲}+z^{۲}=۴$$

$$۹) y=۲-z^{۲}\ ,\ y=z^{۲}\ ,\ x=۰\ ,\ x+z=۴$$

$$۱۰) z=۴y^{۲}\ ,\ z=۲\ ,\ x=۲\ ,\ x=۰$$

$$۱۱) z=x^{۲}+y^{۲}\ ,\ y+z=۲$$

$$۱۲) z=۹-x^{۲}\ ,\ z=۰\ ,\ y=-۱\ ,\ y=۲$$

۱۳) انتگرال سه گانه $f(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$، روی مکعب واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=۱$ و $y=۱$ و $z=۱$ به دست آورید.

۱۴) حجم جسمی که در یک هشتم اول و محدود به استوانه $x=۴-y^{۲}$ و صفحات $z=y$ و $x=۰$ و $z=۰$ می‌باشد را به دست آورید

۱۵) حجم جسمی که محدود به استوانه $y^{۲}+۴z^{۲}=۱۶$ و صفحات $x+y=۴$ و $x=۰$ می‌باشد را به دست آورید.

۱۶)حجم جسمی که محدود به صفحات مختصات و استوانه $x^۲ + y^۲ = ۴$ و صفحه $x + z = ۳$ می‌باشد را به دست آورید.

۱۷) حجم جسمی که محدود به استوانه $x^۲ + y^۲ = ۴$ و صفحه $z = ۰$ و مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ می‌باشد را به دست آورید.

۱۸) حجم جسمی که محدود به استوانه $x^۲ + y^۲ = ۴$ و صفحه $z = ۰$ و سهمیگون $z = x^۲ + y^۲$ می‌باشد را به دست آورید.

۱۹) حجم جسمی که محدود است از پائین به صفحه xoy و از بالا به صفحه $z = ۱$ و از اطراف به رویه $r = z \sin\theta$ را به دست آورید.

۲۰) حجم جسمی که محدود است به صفحه $z = ۱$ و رویه $r = z(۱ + \sin\theta)$ را به دست آورید.

۲۱) حجم جسمی که محدود است به صفحات $z = ۱$ و $z = ۲$ و رویه $rz = ۲$ را به دست آورید.

۲۲) حجم جسمی که محدود است از پائین به صفحه xoy واز بالا به سهمیگون $z = x^۲ + y^۲$ و از اطراف به هذلولی‌گون یکپارچه $y^۲ + x^۲ - \frac{z^۲}{۴} = ۱$ را به دست آورید.

۲۳) کره $\rho = ۴$ توسط صفحه $z = ۲$ قطع شده است ، حجم قسمت بزرگتر را به دست آورید.

۲۴) حجم جسمی را که بالای مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و زیر کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = z$ قرار دارد را بیابید.

۲۵) حجم بین صفحه $z = ۰$ و استوانه $x^۲ + y^۲ = ۴$ و صفحه $y - z = -۳$ را بیابید.

۲۶) حجم محصور به سطح $\left(\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹} + \frac{z^۲}{۲۵}\right)^۲ = \frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹} + \frac{z^۲}{۲۵}$ را بیابید.

۲۷) حجم بریده شده از کره $\rho = a$ توسط $\varphi = \alpha$ را به دست آورید.

۲۸) حجم جسمی که محصور به کره $\rho = a$ و نیمه مخروط‌های $\varphi = \alpha$ و $\varphi = \beta$ می‌باشد را به دست آورید.

۲۹) مطلوبست محاسبه حجم درون مخروط $\varphi = \frac{۲\pi}{۳}$ و رویه $\rho = (۱ - \cos\varphi)$.

۳۰) مطلوبست محاسبه $\iiint\limits_R \frac{xy}{z} dxdydz$ که در آن R ناحیه محصور به سطوح $y = x$ و $y = ۲x$ و $xy = ۱$ و $xy = ۳$ می‌باشد.

۳۱) مطلوبست محاسبه حجم ناحیه محصور به $z = \frac{x^۲ + y^۲}{۳}$ و $z = \frac{x^۲ + y^۲}{۲}$ استوانه‌های هذلولوی $xy = ۱$ و $xy = ۹$ و $xz = ۴$ و $xz = ۳۶$ و $yz = ۲۵$ و $yz = ۴۹$.

۳۲) جرم جسم کروی $۹ \leq x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۲۵$ را با تابع چگال $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ بیابید.

۳۳) جرم ناحیه محصور بین $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و صفحات $z = ۰$ و $z = h$ را با فرض $\rho(x, y, z) = x$ بیابید.

۳۴) جرم ناحیه محصور به کره $r^۲ + z^۲ = ۴$ با فرض $\rho(x, y, z) = r^{-r}|z|$ را بیابید.

۳۵) مرکزجرم ناحیه محصور به صفحه xoy و از بالا به کره $r^۲ + z^۲ = ۴$ و خارج استوانه $r = \frac{a}{۲}$ را بیابید.

۳۶) گشتاور ماند $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$ را با فرض تابع چگال $\rho(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲}}$ نسبت به صفحه yoz بیابید.

۳۷) جسمی محصور است به استوانه $r = ۵$ و مخروط $z = r$ واقع در بالای صفحه xoy، مطلوبست محاسبه I_z.

۳۸) جسمی محصور است به صفحه xoy و سهمیگون $z = ۴ - x^۲ - y^۲$، اگر چگالی واحد جرم مقدار ثابت k باشد مطلوبست محاسبه I_z.

۳۹) مخروط $\varphi = \frac{\pi}{۴}$ به ارتفاع ۴ سانتی‌متر مفروض است چگالی در هر نقطه برابر است با $\delta = \rho^۳$ مطلوبست I_z.

۴۰) حاصل انتگرال زیر را بدست آورید:

$$\int_{۰}^{\sqrt{۲}} \int_{y}^{\sqrt{۴-y^۲}} \int_{۰}^{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}} \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} dz dy dx$$

۴۱) مطلوبست محاسبه $\iiint\limits_R \frac{۱}{\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۲)^۲+(z-۳)^۲}} dxdydz$، که R کره‌ای است به مرکز مبداء و شعاع ۵.

۴۲) مطلوبست محاسبه $\iiint\limits_R \sqrt{۱ - ۲x^۲ - ۳y^۲ - ۵z^۲} dv$ که در آن R داخل بیضیگون $۲x^۲ + ۳y^۲ + ۵z^۲ = ۱$ است.

۴۳) مطلوبست محاسبه $\iiint\limits_R dxdydz$ که در آن R داخل بیضیگون $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$ است.

۴۴) مطلوبست محاسبه $\iiint\limits_R (x^۲ + y^۲ + z^۲) dv$ که در آن R کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۲$ می‌باشد.

۴۵) مطلوبست محاسبه $\iiint\limits_R (x + y + z)^۲ dv$ که در آن R محدود به کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۳$ و سهمیگون $x^۲ + y^۲ \leq ۲z$ می‌باشد.

۴۶) مطلوبست محاسبه $\iiint\limits_R \frac{dv}{(x-۵)^۲+(y-۳)^۲+(z-۱)^۲}$ که در آن R کره‌ای به مرکز $(۵, ۳, ۱)$ و شعاع ۵ می‌باشد.

تمرین‌های فصل هفتم

۱) مساحت بخشی از رویه $z = y + \frac{۱}{۲}x^۲$ که بالای ناحیه R قرار دارد بیابید به‌طوری‌که R ناحیه مربعی شکل در صفحه xy به مختصات $(۰,۰,۰)$ و $(۱,۰,۰)$ و $(۱,۱,۰)$ و $(۰,۱,۰)$ می‌باشد.

۲) مساحت قسمتی از سهمیگون $z = x^۲ + y^۲$ که زیر صفحه $z = ۱$ قرار می‌گیرد را به دست آورید.

۳) درنظر بگیرید R ناحیه مثلثی شکل در صفحه xy با مختصات $(۰,۰,۰)$ و $(۰,۲,۰)$ و $(۲,۲,۰)$ باشد، مساحت آن قسمت از رویه $z = y^۲$ که بالای ناحیه R قرار دارد را بیابید.

۴) رویه جانبی استوانه‌ای از دو قسمت به معادلات $x = y^۲$ و $x = ۲ - y^۲$ تشکیل شده است مطلوبست مساحت ناحیه‌ای که این استوانه از صفحه $x + ۲y + ۲z = ۵$ جدا می‌کند.

۵) مطلوبست مساحت نواری که صفحات $z = ۲$ و $z = ۶$ از سهمیوار $x^۲ + y^۲ - z = ۰$ جدا می‌کند.

۶) مطلوبست مساحت بخشی از رویه $x^۲ - ۲z = ۰$ که بالای مثلثی واقع در صفحه xy و محدود به خطوط $x = \sqrt{۳}$ و $y = ۰$ و $y = x$ قرار دارد.

۷) مطلوبست مساحت عرقچینی از نیمکره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲ \quad (z \geq ۰)$ که استوانه $x^۲ + y^۲ = ۱$ از نیمکره جدا می‌کند.

۸) مطلوبست محاسبه سطح جانبی کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$.

۹) مطلوبست مساحت بخشی از رویه $x^۲ - ۲y - ۲z = ۰$ که بالای مثلثی واقع در صفحه xy و محدود به خطوط $x = ۲$ و $y = ۰$ و $y = ۳x$ قرار دارد.

۱۰) مطلوبست بخشی از استوانه $x^۲ + z^۲ = ۱$ که بین صفحات $x = \pm\frac{۱}{۲}$ و $y = \pm\frac{۱}{۲}$ قرار دارد.

۱۱) مطلوبست مساحت رویه حاصل از برش صفحه $z - ۲x - y = ۵$ توسط صفحات $x = ۰$ و $x = ۲$ و $y = ۰$ و $y = ۴$.

۱۲) استوانه $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ را با صفحات $x = ۰$ و $x = ۱$ و $z = ۱$ و $z = ۳$ قطع می‌دهیم، مساحت رویه حاصل را بیابید.

۱۳) مطلوبست مساحت بخشی از مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ که محدود شده به یک حلقه از منحنی $r = \sqrt{\cos ۲\theta}$.

۱۴) مطلوبست مساحت بخشی از مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ که بین دو کره $\rho = ۱$ و $\rho = ۲$ محدود می‌باشد.

۱۵) مطلوبست مساحت بخشی از استوانه $x^۲ + z^۲ = a^۲$ که بالای صفحه xy و درون استوانه $x^۲ + y^۲ = a^۲$ می‌باشد.

۱۶) مطلوبست مساحت بخشی از استوانه $z = x^۲ + ۲y^۲$ که محدود شده به منحنی $r = \cos ۲\theta$ می‌باشد.

۱۷) با دوران یک نیمدایره حول قطر آن ، فرمول مساحت رویه یک کره را بدست آورید.

۱۸) مطلوبست مساحت رویه دوار حاصل از دوران قوسی از منحنی زنجیری $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ از $x = ۰$ تا $x = a$ حول محور yها.

۱۹) مطلوبست مساحت رویه دوار حاصل از دوران قوسی از منحنی زنجیری $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ از $x = ۰$ تا $x = a$ حول محور xها.

۲۰) طوق منحنی $۱۸y^۲ = x(۶ - x)^۲$ را حول محور xها دوران می‌دهیم. مساحت رویه دوار حاصل را

بیابید.

۲۱) مساحت کره گون جمع شده حاصل از دوران بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ حول محور x و y را بیابید.

۲۲) مساحت سطح دوار حاصل از دوران منحنی $y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$ حول محور x را بیابید.

ـ مطلوبست $\iint g(x,y,z)dS$ هرگاه:

۲۳) $g(x,y,z) = x^2$، S زیر نیمکره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ می‌باشد.

۲۴) $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$، S قسمتی از صفحه $z = y + 4$ است که داخل استوانه $x^2 + y^2 = 4$ می‌باشد.

۲۵) $g(x,y,z) = x + y$، S قسمتی از صفحه $2x + 3y + z = 6$ است که در یک هشتم اول قرار دارد.

۲۶) $g = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$، S قسمتی از سهمیگون $2z = x^2 + y^2$ است که داخل استوانه $x^2 + y^2 = 2y$ می‌باشد.

۲۷) $g(x,y,z) = x + y + z$، S سطح مکعب $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$ و $0 < z < 1$ است محاسبه کنید.

۲۸) $\iint\limits_S x^2 y dS$، S قسمتی از کره ، به مرکز مبداء و شعاع a واقع در یک هشتم اول می باشد.

۲۹) $\iint\limits_S xy^2z^2 dS$، S قسمتی از صفحه $2x + 3y + 4z = 12$ است که در یک هشتم اول قرار دارد.

۳۰) $\iint\limits_S (xz + 2y)dS$، S قسمتی از منحنی $y = x^3$ است که محدود است به صفحات $y = 0$ و $y = 8$ و $z = 2$ و $z = 0$.

۳۱) $\iint\limits_S (x^2 - 2y + z)dS$، S قسمتی از صفحه $4x + y = 8$ است که محدود است به صفحات مختصات و صفحه $z = 6$.

۳۲) $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dS$، S قسمتی از منحنی $x^2 + y^2 = 4$ است که محدود است به صفحات مختصات و صفحه $x + z = 2$ واقع در یک هشتم اول.

۳۳) $\iint\limits_S zdS$، S سطح قطع شده نیمکره $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ توسط استوانه می‌باشد.

۳۴) $\iint\limits_S x^2 z dS$ ، S قسمتی از سطح مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ است که بین صفحات $z = 1$ و $z = 4$ قرار دارد.

۳۵) مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint\limits_R F \cdot n d\sigma$ که در آن $F = xi + yj + (\sin xy)k$ و سطح مرزی ناحیه بین سطوح $z = 1 - x^2$ و $z = 0$ و $y = 0$ و $y + z = 2$ است.

۳۶) مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint\limits_R F \cdot n d\sigma$ که در آن $F = yi + xj + zk$ و R مرز محصور بین سطوح $z = 5 - x^2 - y^2$ و $z = 1$ می‌باشد.

۳۷) مطلوبست شار برونسوی میدان $F = z^2 i + xj - 3zk$ گذرنده از سطحی که صفحات $x = 0$ و $x = 1$ و $z = 0$ از استوانه سهموی $z = 4 - y^2$ جدا می‌کند.

۳۸) مطلوبست شار برونسوی میدان $F = \dfrac{xi + yj + zk}{\rho^3}$ گذرنده از $b^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

۳۹) مطلوبست شار برونسوی میدان $F = x^2 i + y^2 j + z^2 k$ روی سطح جانبی مخروط به معادله $x^2 + y^2 = z^2$ و $0 \leq z \leq 1$.

۴۰) مطلوبست شار برون سوی میدان $F = yzj + z^2 k$ گذرنده از سطحی که صفحات $x = 0$ و $x = a$ از استوانه $z^2 + y^2 = a^2$ و $0 \leq z$ جدا می‌کند.

۴۱) درستی قضیه دیورژانس را برای $F = 5zk$ روی رویه S به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ بررسی نمایید.

۴۲) درستی قضیه دیورژانس را برای $F = (z^2 - x)i - xyj + 3zk$ روی رویه S محصور به $z = 4 - y^2$ و $x = 0$ و $x = 3$ و صفحه xy بررسی نمایید.

۴۳) درستی قضیه دیورژانس را برای $F = (x^2 - yz)i + (y^2 - zx)j + (z^2 - xy)k$ روی مکعب مستطیل

$۰ < x < ۱$ و $۰ < y < ۱$ و $۰ < z < ۱$ بررسی نمایید.

۴۴) درستی قضیه دیورژانس را برای $F = (x, y, z)$ روی کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ بررسی نمایید.

۴۵) درستی قضیه دیورژانس را برای $F = (x + y)i + (y + z)j + (z + x)k$ روی سطح S خارج جسم محدود به صفحات $x = ۱$ و $y = ۱$ و $z = ۰$ و $x + y + z = ۲$ بررسی نمایید.

تمرین‌های فصل هشتم

انتگرال‌های خطی زیر را روی منحنی c محاسبه نمایید.

۱) مطلوبست $\int_c (x^۲ + ۲y^۲)ds$: که c منحنی به معادله $|x-۱| + |y+۱| = ۲$ می‌باشد.

۲) مطلوبست $\int_c xyds$: که c منحنی به معادله $|x| + |y| = a$ می‌باشد.

۳) مطلوبست $\int_c y^۲ ds$: که c نخستین طاقنمای چرخزاد زیر می باشد:

$$x = a(t - \sin t) \quad \text{و} \quad y = a(۱ - \cos t)$$

۴) مطلوبست $\int_c (x + ۳y)ds$: که در آن c پاره‌خطی است از $A(۰,۰)$ تا $B(۱,۲)$.

۵) مطلوبست $\int_c xyzds$: که در آن c پاره‌خطی است از $A(۰,۰,۰)$ تا $B(۱,۲,۳)$.

۶) مطلوبست $\int_c (xy + z)ds$: که در آن c قسمتی از منحنی $x = a\cos t$ و $y = a\sin t$ و $z = bt$ و $۰ \leq t \leq ۲\pi$ می‌باشد.

۷) مطلوبست $\int_c (x + \sqrt{y} - z^۲)ds$: که در آن c دو مسیر زیر می باشد:

$$R_۱(t) = ti + t^۲ j \qquad ۰ \leq t \leq ۱$$

$$R_۲(t) = i + j + tk \qquad ۰ \leq t \leq ۱$$

۸) مطلوبست $\int_c \frac{۲}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}} ds$: که در آن c پاره خطی است از $A(۰,۰)$ تا $B(۱,\sqrt{۳})$.

۹) مطلوبست $\int_c ۶x^۲ydx + xydy$: c منحنی $y = x^۳ + ۱$ از $A(-۱,۰)$ تا $B(۱,۲)$ می‌باشد.

۱۰) مطلوبست $\int_c ydx + (x+y)dy$: c منحنی $y = x^۲ + ۲x$ از $A(۰,۰)$ تا $B(۲,۸)$ می‌باشد.

۱۱) مطلوبست $\int_c (x-y)dx + xdy$: c منحنی $y^۲ = x$ از $A(۴,-۲)$ تا $B(۴,۲)$ می‌باشد.

۱۲) مطلوبست $\int_c xydx + x^۲y^۳dy$: c منحنی $x = y^۳$ از $A(۰,۰)$ تا $B(۱,۲)$ می‌باشد.

۱۳) مطلوبست $\int_c xzdx + (y+z)dy + xzdz$: c قسمتی از منحنی $x = e^t$ و $y = e^{-t}$ و $z = e^{۲t}$ و $۰ \leq t \leq ۱$ می‌باشد.

۱۴) مطلوبست $\int_c ydx + zdy + xdz$: c قسمتی از منحنی $x = \sin t$ و $y = ۲\sin t$ و $z = sin^۲t$ و $۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲}$ می‌باشد.

۱۵) مطلوبست $\int_c (x-y)dx + (y-z)dy + xdz$: c پاره‌خطی است از $A(۱,-۲,۳)$ تا $B(-۴,۵,۲)$.

۱۶) مطلوبست $\int_c y^۲dx + x^۲dy$: c مثلثی است محدود به $x = ۰$ و $x + y = ۱$ و $y = ۰$.

۱۷) مطلوبست $\int_c ۳ydx + ۲xdy$: c عبارتست از مرز $۰ \leq x \leq \pi$ و $۰ \leq y \leq \sin x$.

۱۸) مطلوبست $\int_c ۲xy^۳dx + ۴x^۲y^۲dy$: c ناحیه مثلثی شکل واقع در ربع اول و محدود به محور x و خط $x = ۱$ و $y = x^۳$ می‌باشد.

۱۹) مطلوبست $\int_c e^x \sin ydx + e^x \cos ydy$: پاره‌خط از $A(۰,۰)$ تا $B(۲,\frac{\pi}{۲})$.

۲۰) مطلوبست $\int_c (۲xy^۲ - y^۳)dx + (۲x^۲y - ۳xy^۲ + ۲)dy$: c پاره‌خط از $A(-۳,-۱)$ تا $B(۱,۲)$ می‌باشد.

۲۱) مطلوبست $\int_c (x^۲ - y)dx - (x - ۳y)dy$: c پاره‌خط از $A(۴,۲)$ تا $B(۶,-۲)$ می‌باشد.

۲۲) مطلوبست $\int_c y\sin xdx - \cos xdy$: c پاره‌خط از $A(\frac{\pi}{۲},۰)$ تا $B(\pi,۱)$ می‌باشد.

۲۳) مطلوبست $\int_c ۴xydx + (۲x^۲ - ۳xy)dy$: c روی دو مسیر ، ابتدا روی پاره خطی از $A(-۳,-۲)$ تا $B(۱,۰)$ و سپس روی قسمتی از دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ که در ربع اول واقع است می باشد.

۲۴) مطلوبست $\int_c ۲xydx + (۶x^۲ - xz)dy + ۱۰zdz$: c پاره‌ای از خم $R(t) = ti + t^۲j + t^۳k$ و $۰ \leq t \leq ۱$ می‌باشد.

۲۵) مطلوبست $\int_c \frac{-y}{x^۲+y^۲}dx + \frac{x}{x^۲+y^۲}dy$: c قوسی از دایره $x^۲ + y^۲ = ۴$ از $(\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ تا $(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})$.

ـ مطلوبست محاسبه انتگراهای زیر به دو روش مستقیم و با استفاده از قضیه گرین

۲۶) $\int_c ۲xydx - x^۲ydy$ که c عبارت است از مثلثی با رئوس $A(۰,۰)$ و $B(۱,۰)$ و $C(۰,۱)$.

۲۷) $\int_c \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy$ که c منحنی بسته محدود به $y = ۰$ و $x = ۱$ و $y = x^۲$ می‌باشد.

۲۸) $\int_c (x+y)dx + xydy$ که c منحنی بسته محدود به $y = ۰$ و $x = ۲$ و $۴y = x^۳$ می‌باشد.

۲۹) $\int_c (۲xy - x^۲)dx + (x + y^۲)dy$ که c منحنی بسته محدود به $y = x^۲$ و $x = y^۲$ می‌باشد.

۳۰) $\int e^{x^۲}dx + xdy$ که c نیمدایره‌ای به مرکز مبداء و شعاع ۱ و محور xها می‌باشد.

ـ با استفاده از قضیه گرین مقدار کار انجام شده را بدست آورید:

۳۱) $F = (۳x + y)i + (۴x - ۵y)j \ , \qquad c : x^۲ + ۴y^۲ = ۱۶$

۳۲) $F = (e^x + y^۲)i + (x^۲y + \cos y)j \qquad c : x^۲ + y^۲ = ۲۵$

۳۳) $F = (xy + y^۲)i + xyj$

و c مرکب از نیمه بالایی بیضی $۹x^۲ + ۴y^۲ = ۳۶$ و بازه $[-۲, ۲]$ روی محور x است

۳۴) $F = (e^{۲x^۳} + ۳y^۲)i + (۴e^{۲y^۲} + ۴x^۲)j$

و c مثلثی با رئوس $A(۰, ۰)$ و $B(۲, ۱)$ و $c(۲, ۶)$ می‌باشد.

۳۵) تمرین‌های ۱۶ و ۱۷ و ۱۸ را به کمک قضیه گرین حل نمایید:

۳۶) مطلوبست $\oint_c \tan y dx + x \tan^۲ y dy$ که c بیضی $x^۲ + ۴y^۲ = ۱$ می‌باشد.

۳۷) مطلوبست $\oint_c \frac{x^۲ y}{x^۲+۱} dx - \tan^{-۱} x dy$ که c بیضی $۴x^۲ + ۲۵y^۲ = ۱۰۰$ می‌باشد.

۳۸) مطلوبست $\oint_{۱۰۰} (xy) + e^{x^۲})dx + \big(x^۲ - \ln(۱ + y)\big)dy$: که c

- پاره‌خط $(۰, ۰)$ تا $(\pi, ۰)$ و خم $y = \sin x \quad (۰ \leq x \leq \pi)$.
- محصور بین محور های مختصات و $y = \cos x$ واقع در ربع اول.
- محصور بین بیضی $۹x^۲ + ۴y^۲ = ۱$ می‌باشد.

۳۹) مطلوبست $\oint_c e^{x+y} dx + e^{x+y} dy$ که c دایره $x^۲ + y^۲ = ۴$ می‌باشد.

۴۰) مطلوبست $\oint_c (y - e^x)dx + (x + \sin y)dy$ که c مرز محصور بین $y = x^۲$ و $y = -x^۲ + ۸$ می‌باشد.

۴۱) مطلوبست $\oint_c e^y \cos x dx + e^y \sin x dy$ که c منحنی $x^۶ + y^۴ = ۱۰$ می‌باشد.

۴۲) مطلوبست $\oint_c (e^x - x^۲ y)dx + ۳x^۲ y dy$: c مرز ناحیه $x = y^۲$ و $y = x^۲$ می‌باشد.