Contents

Equations 2
A-10-108-1 3
A-10-1105-1 7
A-10-1160-1 11
A-10-1186-1 15
A-10-1223-1 18
A-10-1270-1 21
A-10-1274-1 25
A-10-178-1 29
A-10-286-1 32
A-10-323-1 35
A-10-330-1 39
A-10-429-1 41
A-10-521-1 45
A-10-804-1 49
A-10-811-1 53
A-10-883-1 57
A-10-990-1 61

چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

معادلات

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۷ - ۴ شهریور ۱۳۹۳

حل دستگاه معادله غیر خطی به روش ترکیبی اغتشاشی هموتوپی

محبوبه زارع مهرجردی *، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، mzare960@yahoo.com

سعید فراهت، دانشیار دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه سیستان و بلوچستان farahat@hamoon.usb.ac.ir

(دانشجوی کارشناسی ارشد، عضو هیأت علمي)

چکیده: در این مقاله به حل دستگاه دو معادله ای به روش اغتشاشی هموتوپی خواهیم پرداخت، سپس نتایج بدست آمده از این روش را به وسیله نمودار بررسی می کنیم و در نهایت این روش را با روش تجزیه آدومیان مقایسه می کنیم.

کلمات کلیدی: روش اغتشاشی، هموتوپی، آدومیان

مقدمه

روش اغتشاشی برای مسائل ریاضی توسط بل من [۱]، کل [۲] و مالی [۳] مورد بررسی قرار گرفته و برای مسائل مهندسی توسط نی فه [۴]، وان دیک [۵] توضیح داده شده است و همچنین روش تجزیه و تحلیل هموتوپی توسط لیائو [۶] بیان شده است و ترکیب روش اغتشاشی و هموتوپی اولین بار توسط دکتر گنجی و همکارانش [۷] در ایران توضیح داده شده است.

بیان مسئله

بیان معادلات دیفرانسیل کلی حاکم بر مسئله و شرایط مرزی بر حسب تابع جریان و معرفی تابع جریان و پارامتر تشابهی :

شکل کلی معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله به شرح زیر می باشد [۸]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \nu\left(1 + \dfrac{1}{\gamma}\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\sigma B^2}{\rho}u \end{cases} \qquad (۱)$$

در دستگاه فوق پارامترهای u، v، ρ، B، σ، ν، γ، x و y به ترتیب مؤلفه سرعت در راستای x ، مؤلفه سرعت در راستای y ، چگالی سیال، میدان مغناطیسی، ضریب هدایت الکتریکی سیال، ویسکوزیته سینماتیک، مؤلفه افقی سرعت و مؤلفه قائم سرعت می باشند.

دستگاه فوق دارای شرایط مرزی زیر می باشد:

$$u = U_w(x) = -U_0 e^{\frac{x}{l}} \qquad (۲)$$

$$v = V_w(x) = V_0 e^{\frac{x}{2l}} \qquad y = 0 \qquad (۳)$$

$$u = 0 \qquad y \to \infty \qquad (۴)$$

شدت میدان مغناطیسی، تابع جریان و پارامتر تشابهی به ترتیب به صورت زیر معرفی می شوند:

$$B = B_0 e^{\frac{x}{2l}} \qquad (۵)$$

$$\psi = \sqrt{2\nu l u_0}\, f(\eta) e^{\frac{x}{2l}} \qquad (۶)$$

$$\eta = y\sqrt{\frac{u_0}{2\nu l}}\, e^{\frac{x}{2l}} \qquad (۷)$$

و همچنین مؤلفه های سرعت میدان جریان برحسب تابع جریان به صورت زیر بیان می شوند:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (۸)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۹)$$

بازنویسی

بازنویسی معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی که در مرحله قبل برحسب تابع جریان نوشته شده اند برحسب پارامتر تشابهی و حل معادله دیفرانسیل معمولی حاصله با استفاده از روش اغتشاشی هموتوپی: با جایگذاری روابط ۸ و ۹ در دستگاه ۱ و همچنین جایگذاری ۵ و ۶ و ۷ در معادله بدست آمده و نیز قدری مرتب سازی خواهیم داشت:

$$\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) f''' - M^2 f' + f f'' - 2\left(f'\right)^2 = 0 \quad (۱۰)$$

بطوریکه:

$$M^2 = \frac{2\sigma B_0^2}{\rho u_0} \quad (۱۱)$$

$$f = s \qquad f' = -1 \qquad \eta = 0 \quad (۱۲)$$

$$f' \to 0 \qquad \eta \to \infty \quad (۱۳)$$

معادله دیفرانسیل به شکل کلی زیر در نظر می گیریم:

$$A(u) - f(r) = 0 \quad (۱۴)$$

و روش هموتوپی را مانند ۱۵ اعمال می کنیم:

$$H(v,p) = (1-p)\left[L(v) - L(u_0)\right] + p\left[A(v) - f(r)\right] \quad (۱۵)$$

که در روابط بالا $A(u) = L(u) + N(u)$ است و $L(u)$ قسمت خطی و $N(u)$ قسمت غیر خطی است و پارامتر p عددی است بین صفر و یک $p \in [0,1]$ است و بدیهی است که هر چه p از صفر به یک میل کند، جواب هم از مقدار u_0 به مقدار u نزدیک می شود. می توان به سادگی نشان داد که نتایج زیر برقرارند:

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (۱۶)$$

$$H(v,1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (۱۷)$$

در ابتدا با فرض p به عنوان یک پارامتر کوچک می توان نوشت:

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \ldots \quad (۱۸)$$

با میل دادن p به سمت یک می توان جواب u را بدست آورد

$$u = \lim_{p\to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots \quad (۱۹)$$

بنابراین با جایگذاری رابطه ۱۰ در روابط ۱۴ تا ۱۹ خواهیم داشت:

$$(1-p)\left[\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) f''' - \left(1+\frac{1}{\gamma}\right) f_0'''(0)\right] +$$
$$p\left[\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) f''' - M^2 f' + f f'' - 2\left(f'\right)^2\right] = 0 \quad (۲۰)$$

داریم:

$$f = f_0 + p f_1 + p^2 f_2 + p^3 f_3 \quad (۲۱)$$

پس از جایگذاری رابطه ۲۱ در ۲۰ و قدری مرتب سازی خواهیم داشت:

$$p^0 : \left(1+\frac{1}{\gamma}\right) f_0''' = 0 \quad (۲۲)$$

$$f_0(0) = s \quad و \quad f_0'(0) = -1 \quad و \quad f_0''(0) = \alpha$$

$$p^1 : \left(1+\frac{1}{\gamma}\right) f_1''' - M^2 f_0' + f_0 f_0''$$
$$-2 f_0'^2 = 0 \quad (۲۳)$$

$$f_1(0) = 0 \quad و \quad f_1'(0) = 0 \quad و \quad f_1''(0) = 0$$

$$p^2 : \left(1+\frac{1}{\gamma}\right) f_2''' - M^2 f_1' + f_0 f_1'' + f_1 f_0''$$
$$-4 f_0' f_1' = 0 \quad (۲۴)$$

$$f_2(0) = 0 \quad و \quad f_2'(0) = 0 \quad و \quad f_2''(0) = 0$$

$$p^3: \left(1+\frac{1}{\gamma}\right) f_3''' - M^2 f_2' + f_0 f_2'' + f_1 f_1'' + f_2 f_0''$$
$$-2{f_1'}^2 = 0 \qquad (۲۵)$$

$$f_3(0)=0 \quad \text{و} \quad f_3'(0)=0 \quad \text{و} \quad f_3''(0)=0$$

پس از جایگذاری روابط ۲۲ تا ۲۵ در نرم افزار متلب خواهیم داشت:

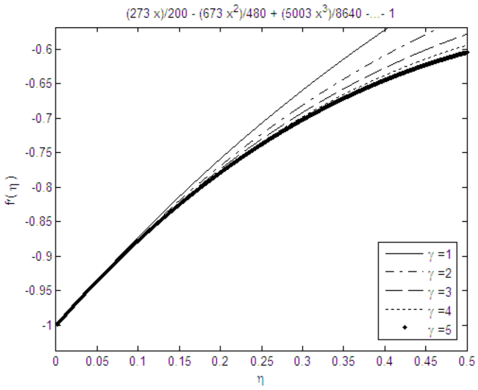
$$f_0 = \frac{\alpha\eta^2}{2} - \eta + s \qquad (۲۶)$$

$$f_1 = \frac{\alpha^2\gamma\eta^5}{40(\gamma+1)} - \frac{\gamma\eta^3\left(2M^2+2\alpha s-4\right)}{12(\gamma+1)} - \frac{\gamma\eta^4\left(-\alpha M^2+3\alpha\right)}{24(\gamma+1)} \qquad (۲۷)$$

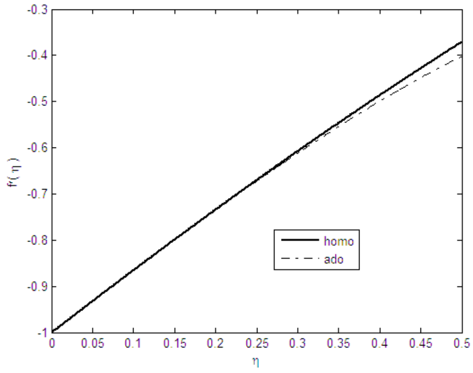
$$\begin{aligned} f_2 = {} & \frac{\eta^6\left(-154 s\alpha^2\gamma^2+14\alpha M^2\gamma^2-168\alpha M^2\gamma^2\right)}{6\left(2680\gamma^2+3360\gamma+1680\right)} \\ & + \frac{\eta^6\left(266\alpha\gamma^2\right)}{6\left(2680\gamma^2+3360\gamma+1680\right)} \\ & - \frac{\eta^7\left(-28\alpha^2M^2\gamma^2+63\alpha^2\gamma^2\right)}{7\left(1680\gamma^2+3360\gamma+1680\right)} \\ & + \frac{\eta^5\left(280\gamma^2-280M^2\gamma^2+70M^4\gamma^2-350\alpha\gamma^2 s\right)}{5\left(1680\gamma^2+3360\gamma+1680\right)} \\ & + \frac{\eta^5\left(140\alpha M^2\gamma^2 s\right)}{5\left(1680\gamma^2+3360\gamma+1680\right)} \\ & + \frac{\eta^4\left(280M^2\gamma^2 s+280\alpha\gamma^2 s^2-560\gamma^2 s\right)}{4\left(1680\gamma^2+3360\gamma+1680\right)} \\ & + \frac{9\alpha^3\gamma^2\eta^8}{8\left(1680\gamma^2+3360\gamma+1680\right)} \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

بررسی نتایج

حال نمودار تابع بدست آمده از این روش را به ازای αهای مختلف در شکل ۱ رسم کرده ایم سپس با نتایج بدست آمده از روش آدومیان مقایسه و نتایج آن در شکل ۲ قابل مشاهده می باشد



شکل ۱: نتایج بدست آمده روش هموتوپی برای α های مختلف



شکل ۲: مقایسه روش هموتوپی و آدومیان

نتیجه

با بررسی نتایج عددی بدست آمده از روش هموتوپی و مقایسه آن با نتایج بدست آمده از روش آدومیان میانگین خطای داده های هر دو نمودار برابر با ۰/۰۰۶۳۸۳۸ می باشد.

مراجع

References

[1] Bellman, R. (1964). Perturbation techniques in Mathematics, physics and Engineering, Holt, Rinehart Winston, New York.

[2] Cole, J.D. (1968). Perturbation Methods in Applied Mathematics, Blaisedell, Waltham, MA.

[3] O' Malley, R.E. Jr. (1974). Introduction to Singular perturbation, Academic, NewYork.

[4] Nayfeh, A.H. (1973). Perturbation Methods, Wiley, New York.

[5] Van Dyke, M. (1975a). perturbation Methods in Fluid Mechanics, Annotated Edition, parabolic press, Stanford, California.

[6] S.J. Liao, An approximate solution technique not depending on small parameters: a specia; example. Int.J. Non- Linear Mech.30 3 (1995),pp.371-380.

[7] Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. (1959). Conduction of Heat in solids, The clarendon press, Oxford.

[8] S. Nadeema, Rizwan Ul Haqa,□, C. Lee b, MHD flow of a Casson fluid over an exponentially shrinking sheet, Scientia Iranica, accepted 1 October(2012).

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014

Lie Group Method for Solving the Kaup-Kupershmidt Equation

M. Sajjadmanesh*, Academic member of Basic Science,
University of Bonab, s.sajjadmanesh@azaruniv.edu
P. Vafadar †,M.Sc.
University of Bonab, pa.vafadar@gmail.com

Abstract: In this paper, based on classical Lie group method, with the help of Maple software, we study Kaup-Kupershmidt equation, and get its infinitesimal generator, commutation table of Lie algebra, symmetry group, optimal system and similarity reductions.
Keywords: Similarity solutions, Lie symmetry, Kaup-Kupershmidt equation, Invariant solution, Optimal system.

1 INTRODUCTION

The so-called $(2+1)$ dimensional Kaup-Kupershmidt equation under consideration is [6]

$$9u_t + u_{xxxxx} + 15uu_{xxx} + \frac{75}{2}u_xu_{xx} + 45u^2u_x$$
$$+5\sigma u_{xxy} - 5\sigma(\partial_x^{-1}u_{yy}) + 15\sigma uu_y + 15\sigma u_x(\partial_x^{-1}u_y) = 0 \quad (1)$$

where $\sigma^2 = 1$. This equation is also called the CKP equation. When $u(x,y,t) \equiv u(x,t)$,(1) becomes the Kaup-Kupershmidt equation

$$9u_t + u_{xxxxx} + 15uu_{xxx} + \frac{75}{2}u_xu_{xx} + 45u^2u_x = 0. \quad (2)$$

Sophous Lie in his famous paper [4] proved that a linear two-dimensional second-order PDE may admit at most a three-parameter invariance group. Such invariance groups are invertible transformations of both the dependent and independent variables of the different equations. Several applications of Lie groups in the theory of differential equations were discussed in the literature [7, 1, 2, 3]. The most important ones are: reduction order of partial differential equations and detection of linearizing transformations, construction of invariant solution, construction of soliton solution, mapping solutions to other solutions and so on. Finding exact solutions of NLPDEs is an arduous task and only in special cases one can write down the solutions explicitly. Deposit of this difficulty, Lie group symmetry method is one of the most powerful methods among the present methods, to determine exact solutions of NLPDEs. There are many papers in this field which some of the interesting ones are [5, 8, 9].
The outline of the paper is as follows. In section2, we present the Lie symmetry analysis of Eq.(2); in Section3, the optimal system of subalgebras are constructed for Kaup-Kupershmidt equation. Fi-

*Corresponding Author
†speaker

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

nally similarity reductions and exact solutions of Eq. (2) are constructed.

2 Lie symmetry analysis of the Kaup-Kupershmidt equation

In this section, we perform Lie symmetry analysis for Eq.2, and obtain its infinitesimal generator, commutation table of Lie algebra.
According to the method of determining the infinitesimal generator of NPDEs, we take the infinitesimal generator of Eq. 2as follows:

$$V = \xi_1(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \quad (3)$$

where $\xi_1(x,t,u)$, $\xi_2(x,t,u)$ and $\phi(x,t,u)$ are coefficient functions of the vector fields to be determined. Using the invariance condition $pr^{(5)}V(\Delta) = 0$, where Δ is Eq. 2 and $pr^{(5)}V$ is the fifth prolongation of V, applying the fifth prolongation of V to Eq. 2, and with help of Maple software, we get

$$\begin{aligned} \xi_1 &= C_1 + \frac{1}{5}C_3 x, \\ \xi_2 &= C_2 + C_3 t, \\ \phi &= -\frac{2}{5}C_3 u \end{aligned} \quad (4)$$

where C_1,C_2 and C_3 are arbitrary constants. Hence the Lie algebra of infinitesimal symmetries of Eq. 2 is spanned by the following vector fields:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad V_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad V_3 = \frac{1}{5}x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2}{5}u\frac{\partial}{\partial u} \quad (5)$$

The commutation relations of Lie algebra determined by V_1, V_2, V_3, are shown in Table 1.

TABLE 2.Adjoint representation of the Lie algebra of the Kaup-Kupershmidt Equation

	V_1	V_2	V_3
V_1	0	0	$\frac{1}{5}V_1$
V_2	0	0	$-\frac{3}{5}V_2$
V_3	$-\frac{1}{5}V_1$	$\frac{3}{5}V_2$	0

Theorem 2.1. *The Lie algebra of equation.*(2) *is not semi-simple.*

Theorem 2.2. *The Lie algebra of equation.*(2) *is solvable.*

The one-parameter group G_i, generated by the vector fields $V_i, i = 1,2,3$, are given by $exp(\xi(x,t,u))$, that is, the corresponding point transformations are:

$$\begin{aligned} G_1 &: (x,t,u) \to (x+\varepsilon, t, u), \\ G_2 &: (x,t,u) \to (x, t+\varepsilon, u), \\ G_3 &: (x,t,u) \to (e^{\frac{1}{5}\varepsilon}x, e^{\varepsilon}t, e^{-\frac{2}{5}\varepsilon}u). \end{aligned}$$

3 Adjoint representation

In this section we shall obtain the adjoint representation of the symmetry Lie algebra g in order to look for a way to find some group invariant solutions for the Kaup-Kupershmidt equation. In Table 2. we present the adjoint representation of the symmetry Lie algebra g. The entries of the table are given as follows: in the row i and column j, the corresponding entry is:

$$Ad(exp(\varepsilon V_i))V_j = V_j - \varepsilon[V_i, V_j] + \frac{\varepsilon^2}{2}[V_i,[V_i,V_j]] + \cdots . \quad (6)$$

Furthermore, we can compute the adjoint representations of the vector fields.

TABLE 2.Adjoint representation of the Lie algebra of the Kaup-Kupershmidt Equation

	V_1	V_2	V_3
V_1	V_1	V_2	$V_3 - \frac{1}{5}\varepsilon V_1$
V_2	V_1	V_2	$V_3 + \frac{3}{5}\varepsilon V_2$
V_3	$e^{\frac{1}{5}\varepsilon}V_1$	$e^{-\frac{3}{5}\varepsilon}V_2$	V_3

Theorem 3.1. *The optimal system of one-dimensional subalgebras corresponds to* (2) *is expressed by*

1. V_3,
2. $\alpha V_1 + V_2, \qquad \alpha \in \{-1, 0, 1\}$,
3. V_1.

4 Similarity reductions and exact solutions

In the preceding section, we obtained the vector fields of Eq(2). Now we deal with the similarity reductions and exact explicit solutions for the two equations based on the symmetry analysis.
A solution of a PDE in two independent variables can be constructed by two invariants of the group. One of these two invariants becomes the new independent variable $\zeta = \zeta(x,t)$ the so-called similarity variable, and the other invariant plays the role of a dependent variable $S(\zeta)$ given by a general relation in the form $H = H(x,t,S(\zeta))$ with the dependence of H on x and t and the arbitrary function $S(\zeta)$ known explicitly. Therefore, every PDE of order n can be converted into an ODE of the same order in the sense of a similarity reduction. In order to reduce PDEs (2) to a system of partial differential equations with only two independent variables, we construct similarity variables and similarity forms of field variables. Using a straightforward analysis, the characteristic equations used to find similarity variables are:

$$\frac{dx}{\xi_1} = \frac{dt}{\xi_2} = \frac{du}{\phi} = d\varepsilon. \tag{7}$$

Integration of first order differential equations corresponding to pairs of equations involving only independent variables of (7) leads to similarity variables.We distinguish three cases:

1. For the generator V_3, we have the following similarity variables

$$\zeta = \frac{t}{x^5}, \qquad S(\zeta) = ux^2 \tag{8}$$

From now, we suppress the argument ζ, that means $S(\zeta) = S$, a prime denotes d/df and brackets are used for derivations of higher order.
The similarity function S satisfies the given nODE, which is, in particular, a complete reduction of Eq. (2),

$$\begin{aligned}&180S^3 + 1875\zeta^2 S'^2 + 90S^2(18 + 5\zeta S')\\ &+3S'(-6 + 36480\zeta + 3125\zeta^3 S'')\\ &+30S(48 + 805\zeta S' + 725\zeta^2 S'' + 125\zeta^3 S^{(3)})\\ &+250\zeta^2(1656S'' + 5\zeta(276S^{(3)} + 70\zeta S^{(4)}\\ &+5\zeta^2 S^{(5)})) = 0\end{aligned} \tag{9}$$

by numerical solution we obtain Fig.1.

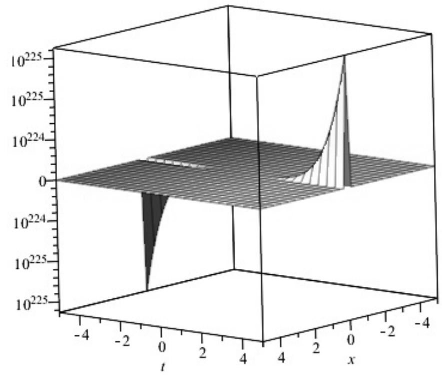


Figure 1: Solution curves of the nODE (9) generated by different initial values,
$S(1) = 1, S'(1) = 2, S''(1) = 3, S^{(3)}(1) = 4, S^{(4)}(1) = 5$

2. For the linear combination $V = \alpha V_1 + V_2$, we have:

$$\zeta = x - \alpha t, \qquad S(\zeta) = u \tag{10}$$

The similarity function S satisfies the given nODE, which is, in particular, a complete reduction of Eq. (2),

$$-9\alpha S' + 45S^2 S' + \frac{75}{2} S' S'' + 15SS^{(3)} + S^{(5)} = 0 \tag{11}$$

3. For the generator V_1, we have the following similarity

$$\zeta = t, \qquad S(\zeta) = u \tag{12}$$

We reduce equation2 to the following ODE:

$$9S' = 0. \tag{13}$$

therefore, $S(\zeta) = c$, where c is arbitrary constant.

References

[1] G. W. Bluman, A. F. Cheviakov and S. C. Anco, Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations, Springer Science+Business Media, LLC 2010.

[2] G. W. Bluman and S. Kumei, Symmetries and Differential Equations, Springer-Verlag, World Publishing Corp., 1989.

[3] N. H. Ibragimov, Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations, Wiley, Chichester, 1999.

[4] S. Lie, "Theorie der Transformations gruppenm," Math. Ann., Vol. 16, 1880, pp. 441- 528.

[5] H. Liu, J. Li, L. Liu, and Y. Wei, "Group classifications, optimal systems and exact solutions to the generalized Thomas equations," J. Math. Anal. Appl., Vol. 383, 2011, pp. 400-408.

[6] X. B. Hu, D. L. Wang and X. M. Qian, "Soliton solutions and symmetries of the 2+1 dimensional KaupKupershmidt equation," Physics Letters A. ,1999, pp. 409415.

[7] P. J. Olver, Application of Lie groups to differential equations, New York: Springer-Verlag, 1993.

[8] V. Torrisi and M. C. Nucci, "Application of Lie group analysis to a mathematical model which describes HIV transmission in The Geometrical Study of Differential Equations," J. A. Leslie, T. P. Robart (Eds.), Contemp. Math., Vol. 285, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, pp. 11-20.

[9] J. Zhang and Y. Li, "Symmetries and First Integrals of Differential Equations ," Acta. Appl. Math., Vol. 103, 2008, pp. 147-159.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

تقریبی از جواب معادلات انتگرال فردهلم فازی هامرشتین خطی

مریم عرب عامری، دانشگاه سیستان و بلوچستان، arabameri@math.usb.ac.ir
(عضو هیأت علمی)
ملیحه شاهرضائی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، mshahrezaie@pgs.usb.ac.ir
(دانشجوی کارشناسی ارشد)

چکیده: در این مقاله روشی برای حل تقریبی معادلات انتگرال فردهلم فازی هامرشتین خطی ارائه می شود و روش مذکور بر اساس روش تقریب های متوالی ساخته می شود و با استفاده از روش ذوزنقه برای تقریب انتگرال فازی موجود در معادله منجر به یک فرمول تکراری برای حل معادله می گردد. سرانجام آزمایشات عددی و نتایج آنها به همراه دقت روش توضیح داده می شود.

کلمات کلیدی: انتگرال ریمان فازی، تقریب های متوالی، متر هاسدورف، معادلات انتگرال فازی.

مقدمه

وجود و منحصر بفردی جواب از مسائل اصلی پیرامون معادلات انتگرال فازی است. روش تقریب های متوالی و روشهای تکراری از جمله روش های عددی بکار رفته تا بحال برای حل معادلات انتگرال فازی است.[؟]. همچنین روش های عددی تحلیلی مثل روش تجزیه آدومیان و آنالیز هموتوپی برای حل معادلات مذکور بکار گرفته شده است.[؟]. در این مقاله روش تقریب های متوالی برای حل معادلات انتگرال هامرشتین فازی به صورت زیر

$$x(t) = g(t) + (FR)\int_a^b H(t,s).f(s,x(s))d, \quad (۱)$$

بکار برده می شود، لازم به ذکر است (FR) برای نمایش انتگرال ریمان فازی به کار می رود.

تعاریف و مقدمات فازی

عدد فازی یک تابع $u : R \longrightarrow [0,1]$ با خواص زیر است.

i) u نیم پیوسته بالایی است.
ii) بازه ای مانند$[a,c]$ موجود است به طوری که $u(x)$ در خارج از بازه $[a,c]$ مساوی صفر است.
iii) اعداد حقیقی a و b وجود دارند بطوریکه

$$c \le a \le b \le d$$

که u روی بازه $[c,a]$ صعودی و روی بازه $[b,d]$ نزولی است.

مجموعه اعداد فازی را با E^1 نمایش می دهند. عدد حقیقی $a \in R$ می تواند با عدد فازی $\tilde{a} = \chi_{\{a\}}$ تفسیر

می شود. بنابراین $R \subset E^1$. r-برش عدد فازی u به صورت

$$[u]^r = \{x \in R : u(x) \geq r\}$$

تعریف می شود که نمایش پارامتری آن بصورت زیر است

$$[u]^r = [u_-^r, u_+^r], \qquad \forall r \in [\mathbf{0}, 1].$$

که u_- و u_+ به عنوان توابعی به صورت

$$u_-, u_+ : [\mathbf{0}, 1] \longrightarrow R$$

در نظر گرفته می شوند. فاصله بین دو عدد فازی u, v در E^1 در متر هاسدورف به صورت زیر تعریف می شود

$$D(u,v) = \sup\{\max(|u_-^r - v_-^r|, |u_+^r - v_+^r|)\}.$$

برای هر تابع فازی مقدار

$$f : I \subset R \longrightarrow E^1$$

توابع $f_-^r, f_+^r : I \subset R \longrightarrow R$ را به ازای هر $r \in [\mathbf{0}, 1]$ و هر $t \in I$ می توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$f_+^r(t) = (f(t))_+^r, f_-^r(t) = (f(t))_-^r$$

که به آنها توابع چپ و راست r-برش از f می گویند.
فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow E^1$ و $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ یک افراز از بازه $[a,b]$ باشد، نقاط $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ به ازای $i = 1, \ldots, n$ و تابع $\delta : [a,b] \longrightarrow R_+$ را در نظر بگیرید.
افراز $P = \{([x_{i-1}, x_i]; \xi_i); i = 1, \ldots, n\}$ را با $P = (\Delta_n, \xi)$ نشان می دهند و به آن $\delta - fine$ گویند اگر و فقط اگر

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i)).$$

برای $I \in E^1$ تابع f انتگرال پذیر هنستوک فازی است اگر برای هر $\epsilon > \mathbf{0}$ تابع $\delta : [a,b] \longrightarrow R_+$ وجود داشته باشد بطوریکه برای افراز P که در خاصیت $\delta - fine$ صدق می کند،داشته باشیم:

$$D(\sum_{i=1}^{n}(x_i, x_{i-1}).f(\xi_i), I) < \epsilon.$$

عدد فازی I، انتگرال هنستوک فازی f نامیده می شود. وقتی تابع $\delta : [a,b] \longrightarrow R_+$ پیوسته است، برای توابع فازی مقدار انتگرال پذیری ریمان بدست می آید. در این حالت $I \in E^1$ انتگرال ریمان فازی f نامیده می شود.

روش تقریب های متوالی برای حل معادله (1)

در روش تقریب های متوالی همانند روش تقریب های متوالی برای حل معادلات انتگرال غیر فازی با یک تقریب اولیه مانند x_0 شروع کرده و جواب با استفاده از فرمول تکراری زیر تعیین می شود،

$$x_m(t) = g(t) + (FR)\int_a^b H(t,s).f(s, x_{m-1}(s))ds$$
$$t \in [a,b]$$

حال اگر برای تقریب انتگرال فازی موجود در رابطه تکراری فوق از قاعده ذوزنقه استفاده کنیم رابطه زیر برای $i = \mathbf{0}, 1, \ldots, n$ بدست می آید،

$$x_m(t_i) \simeq g(t_i)$$
$$+\frac{(b-a)}{2n}.\sum_{j=1}^{n}[H(t_i,t_{j-1}).f(t_{j-1}, x_{m-1}(t_{j-1})) + H(t_i,t_j).f(t_j, x_{m-1}(t_j))]$$

با توجه با مطالب گفته شده می توان الگوریتم تکراری زیر را برای حل معادله (1) بکار برد. برای

$i = 0, 1, ..., n$ قرار دهید $x_0(t_i) = g(t_i)$.

برای $m = 1$ و به ازای هر $i = 0, 1, ..., n$ قرار دهید

$$x_1(t_i) \simeq g(t_i)$$

$$+\frac{(b-a)}{2n}.\sum_{j=1}^{n}[H(t_i, t_{j-1}).f(t_{j-1}, x_0(t_{j-1})) + H(t_i, t_j).f(t_j, x_0(t_j))]$$

در این مرحله مقادیر محاسبه شده مرحله قبل استفاده می شود سپس مابقی مقادیر به ازای $m \geq 2$ به صورت زیر بدست می آید

$$x_m(t_i) = g(t_i)$$

$$+\frac{(b-a)}{2n}.\sum_{j=1}^{n}[H(t_i, t_{j-1}).f(t_{j-1}, x_{m-1}(t_{j-1})) + H(t_i, t_j).f(t_j, x_{m-1}(t_j))]$$

این روند را ادامه می دهیم تا شرط تحقق زیر برقرار باشد

$$D(x_m(t_i), x_{m-1}(t_i)) < \epsilon' \qquad \forall i = 0, 1, ..., n$$

نتیجه عددی

معادله انتگرال

$$x(t) = g(t) + \int_0^1 H(t, s).x(s)ds \qquad t \in [0, 1],$$

با

$$H(t, s) = ts,$$

و

$$g(t, r) = [1 - \frac{1-r}{2}, 1 + \frac{1-r}{2}],$$

$$r \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}.$$

دارای جواب دقیق به صورت زیر است

$$x^*(t, r) = [1 + \frac{3t}{4} - \frac{1-r}{2}, 1 + \frac{3t}{4} + \frac{1-r}{2}]$$

الگوریتم توضیح داده شده برای حل معادله انتگرال داده شده بکار گرفته می شود و نتایج حاصله با جواب

دقیق موجود با استفاده از توابع خطای تعریف شده به صورت

$$e^r_{i,+} = |x^*(t_i)^r_+ - x_m(t_i)^r_+|$$

و

$$e^r_{i,-} = |x^*(t_i)^r_- - x_m(t_i)^r_-|$$

مقایسه می شوند. فرض کنید $r = 0$ و $n = 10$ و $\epsilon' = 10^{-15}$

$$a = 0, \quad b = 1, \quad h = 0.1$$

پس از 31 تکرار ماکزیمم خطا به صورت زیر بدست می آید

$$e^0_{10,+} = 0.37782, e^0_{10,-} = 0.37406$$

نتایج

در این مقاله روشی برای حل تقریبی معادله انتگرال فردهلم فازی هامرشتین خطی بر اساس توسعه ای از روش تقریب های متوالی معرفی شد.روش مذکور برای معادلات غیر خطی نیز قابل کاربرد است.

مراجع

[۱] A.M. Bica، C. Popescu، Approximating the solution of nonlinear Hammerstein fuzzy integral equations، Fuzzy Sets and Sys. ۲۴۵(۲۰۱۳) ۱-۱۷. pp.

[۲] J.Y. Park، S.Y. Lee، J.U. Jeong، The approximate solutions of fuzzy functional integral equations، Fuzzy Sets Syst. ۱۱۰(۲۰۰۰)، pp. ۷۹-۹۰.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

حل تحلیلی معادله برگرز ۲+۱ بعدی

احمدرضا حقیقی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ah.haghighi@uut.ac.ir

عذرا یارمحمدی، دانشجوی کارشناسی ارشد گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی ارومیه، azra.yarmohammadi@gmail.com

چکیده: در این مقاله حل تحلیلی معادله برگرز ۲+۱ بعدی مورد بررسی قرار گرفته است. ما از تغییر پارامتر کول-هوپف برای حل این معادله استفاده می کنیم که منجر به حل سالیتونی آن به کمک روش هرمان-نوسیر می شود.

کلمات کلیدی: معادله برگرز ۲+۱ بعدی، حل سالیتونی، تغییر پارامتر کول-هوپف، روش هرمان نوسیر

مقدمه

معادله برگرز توسط باتمن در سال ۱۹۱۵ مطرح شده که به عنوان تقریب کیفی معادلات ناویراستوکس شناخته شده است. اگر در معادله ناویراستوکس تراکم پذیر، جمله فشار و معادله پیوستگی حذف شود، معادله برگرز بدست می آید که این معادله شامل عبارات غیرخطی جابجایی و فشار می باشد. این معادله ویژگی های غیرخطی معادلات حاکم در بسیاری از مسائل انتقالی عملی از قبیل رشد فصل مشترک تجمع، انتقال توربولانس، تئوری موج ضربه ای و فرآیندهی موج در محیط ترموالاستیک را شامل میشود[۱]. همچنین این معادله کاربرد گسترده ای در بسیاری از پدیده های فیزیکی از قبیل : شبیه سازی جریان ترافیک، رفتار لایه مرزی، مدل دینامیک گاز، موج ضربه ای و موج سالیتوری دارد[۲]. تحقیق بر روی پاسخ های سالیتونی و موج های سالیتوری ، اولین بار در قرن نوزدهم میلادی توسط جان اسکات راسل هنگامیکه مسیر یک موج سالیتوی را در یک کانال آب دنبال می کرد، صورت گرفت [۳]. سالیتون به دسته خاصی از جوابهای موضعی یک معادله غیرخطی موج گفته می شود که با شکل ، ارتفاع و سرعت ثابت به پیشروی و انتشار در محیط ادامه میدهند. درواقع از نظر ریاضی سالیتون ها جوابهایی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی انتگرال پذیر هستند[۴]. برای مطالعه معادلات تکامل غیرخطی که منجر به جواب سالیتونی میشوند از روش های سیستماتیک بسیاری میتوان استفاده نمود، از قبیل: روش تقارنی تعمیم یافته ، روش پین لو ، تکنیک فافیان ، روش پراکنده سازی معکوس ، رش تغییر شکل بک لاند ، روش هیروتای دوسویه و روش هرمان-نوسیر. از بین روش های ذکرشده، روش هیروتای دوسویه و روش هرمان-نوسیر معمول و قابل فهم تر می باشند و به همین دلیل برای تعیین راه حل های چندگانه سالیتونی ایده آل ترند[۲،۴]. معادله برگرز ۲+۱ بعدی به فرم زیر می باشد[۲]:

$$v_t = v_{xx} + 2v_x\partial_y^{-1}v_x \qquad (۱)$$

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳
دانشگاه سمنان

ابتدا به کمک تغییر پارامتر کول-هوپف رابطه زیر را داریم:

(۲) $$v(x,y,t)=u_y(x,y,t)$$

که با این تغییر پارامتر، معادله (۱) بفرم زیر در می آید:

(۳) $$u_{yt}=u_{xxy}+2u_{xy}u_x$$

در این مقاله ما از روش کول-هوپف و روش هرمان-نوسیر برای جابجایی این دو معادله استفاده نموده ایم. هدف ما بدست آوردن راه حل پیچ چرخشی(سالیتونی) برای این معادله است.

حل سالیتونی معادله برگرز۲+۱ بعدی

همانطور که نشان دادیم، فرم کلی معادله برگرز۲+۱ بعدی ، با استفاده از فرمول (۱) بصورت زیر است:

(۴) $$u_yt=u_{xxy}+2u_{xy}u_x$$

با جایگذاری رابطه زیر

(۵) $$u(x,y,t)=e^{k_ix+r_iy-c_it}$$

در جملات خطی رابطه (۴) ، رابطه ی پراکندگی زیر به دست می آید:

(۶) $$c_i=-k_i$$

که در این صورت داریم:

(۷) $$\theta_i=k_ix+r_iy+k_i^2t$$

با استفاده از روش تغییر پارامتر کول-هوپف، راه حل پیچ چرخشی رابطه (۱) بفرم زیر بدست می آید:

(۸) $$v(x,y,t)=R(\ln f(x,y,t))_y=R\frac{f_y(x,y,t)}{f(x,y,t)}$$

درنتیجه:

(۹) $$u(x,y,t)=R(\ln f(x,y,t))$$

در روش هرمان-نوسیر برای حل پیچ منفرد میتوان از تابع معین f(x،y،t) استفاده نمود:

(۱۰) $$f(x,y,t)=1+e^{k_1x+r_1y+k_1^2t}$$

با جایگذاری رابطه (۹) در رابطه (۴) و حل R درمی یابیم:

(۱۱) $$R=1$$

با جایگذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۹) به راه حل زیر میرسیم:

(۱۲) $$u(x,y,t)=\ln(1+e^{k_1x+r_1y+k_1^2t})$$

با استفاده از رابطه (۲) راه حل پیچ منفرد زیر بدست می آید:

(۱۳) $$v(x,y,t)=\frac{r_1e_1^kx+r_1y+k_1^2t}{1+e_1^kx+r_1y+k_1^2t}$$

برای بدست آوردن پیچ دوگانه این راه حل نیز قرار میدهیم:

(۱۴) $$f(x,y,t)=1+e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+a_12e^{\theta_1+\theta_2}$$

با جایگذاری رابطه (۱۴) در (۹) و استفاده آنها در رابطه (۴)، درمی یابیم که هیچگونه جابجایی فازی صورت نگرفته است.

(۱۵) $$a_{12}=0$$

پس از این رو قرار میدهیم:

(۱۶) $$a_{ij}=0,\quad 1\le i<j\le 3$$

با جایگذاری رابطه (۱۵) و (۱۴) در رابطه (۹) درمی یابیم:

(۱۷) $$u(x,y,t)=\ln(1+e^{k_1x+r_1y+k_1^2t}+e^{k_2x+r_2y+k_2^2t})$$

با استفاده ازرابطه (۲)، راه حل پیچ دوگانه بفرم زیر درمی آید:

$$v(x,y,t)=\frac{r_1e^{k_1x+r_1y+k_1^2t}}{1+e^{k_1x+r_1y+k_1^2t}}+\frac{r_2e^{k_2x+r_2y+k_2^2t}}{+e^{k_2x+r_2y+k_2^2t}}$$

برای بدست آوردن حل پیچ سه گانه نیز قرار می دهیم:

(۱۸) $$f(x,y,t)=1+e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+e^{\theta_3}$$

با ادامه ی روند قبلی داریم:

$$u(x,y,t)=\ln(1+e^{k_1x+r_1y+k_1^2t}+e^{k_2x+r_2y+k_2^2t}+e^{k_3x+r_3y+k_3^2t}) \quad (۱۹)$$

و با استفاده از رابطه (۲) حل پیچ سه گانه زیر بدست می آید:

$$v(x,y,t)=\frac{r_1e^{k_1x+r_1y+k_1^2t}+r_2e^{k_2x+r_2y+k_2^2t}}{1+e^{k_1x+r_1y+k_1^2t}+e^{k_2x+r_2y+k_2^2t}}+\frac{r_3e^{k_3x+r_3y+k_3^2t}}{+e^{k_3x+r_3y+k_3^2t}} \quad (۲۰)$$

این روابط نشان دهنده ی این هستند که برای معادله برگرز ۱+۲ بعدی (معادله (۱)) می توان راه حل پیچ N گانه را برای N های متناهی (N≥۱) بدست آورد.بنا بر نتایج بدست آمده ، با استقرا میتوان حجل پیچ چرخشی عمومی را بفرم زیر بیان نمود:

$$v(x,y,t)=\frac{\sum_{i=1}^{N} r_ie^{k_ix+r_iy+k_i^2t}}{1+\sum_{i=1}^{N} e^{k_ix+r_iy+k_i^2t}} \quad (۲۱)$$

همانطور که ملاحظه میشود از نظر ریاضی ما این معادله برگزر را حل نموده و به یک جواب سالیتونی دست یافتیم چرا که معادله اولیه موردنظرمان یک معادله دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزیی انتگرال پذیر بود. درواقع از نظر فیزیکی سالیتون به دسته خاصی از جواب های موضعی یک معادله غیرخطی موج گفته می شود که با شکل، ارتفاع و سرعت ثابت به پیشروی و انتشار در محیط ادامه می دهند.

نتایج

کلیه ی متغیرهای معادله برگرز۲+۱ بعدی با استفاده از روش تغییر پارامتر هویف-کول و روش هرمان-نوسیر بررسی شدند و راه حل های پیچ چندگانه (حل سالیتونی) برای این معادله نتیجه گیری و نتایج بدست آمده برای این معادله تعمیم داده شد.

مراجع

[1] J.M. Burgers, *The Nonlinear Diffusion Equation*, Reidel, Dordrecht, 1974.

[2] A.M. Wazwaz, *A study on the (2 + 1)-dimensional and the (2 + 1)-dimensional higher-order Burgers equations*, Appl. Math. 25 (2012) 1495-1499.

[3] J S Russell, *British Association Report*. John urray, London, 1984.

[4] A.M. Wazwaz, *(2 + 1)-Dimensional Burgers equations BE(m+n+ 1): Using the recursion operator*, Appl. Math. Comput. 219 (2013) 9057-9068.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳
دانشگاه سمنان

مسئله‌ی گورسات و جواب‌های معادله‌ی ماتریسی غیرخطی شرودینگر

فاطمه بازماندگان راهزنی ، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، m۹۱۱۶۱۰۱۲@post.vru.ac.ir
سید محمد حسینی ، استاد یار گروه ریاضی، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، smhoseini@.vru.ac.ir
افروز آرمات، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، m۹۱۱۶۱۰۰۲@post.vru.ac.ir

چکیده: روش انتقال پراکندگی معکوس فرآیند اصلی براي پيدا کردن جواب هاي سوليتونی معادلهي انتگرال‌پذير می‌باشد. اساساً یک معادلهي انتگرال‌پذير به عنوان شرط هم‌خوانی یک جفت لکس در نظر گرفته می‌شود. از روش انتقال پراکندگی با استفاده از مسئله‌ی گورسات برای معادله‌ی غیر خطی شرودینگر جواب‌های سولیتونی و به عنوان مثال جواب تک سولیتونی به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال‌پذیر، روش پراکندگی معکوس، مسئله‌ی گورسات، معادلات ژلفاند-لاویتان-مرچنکو، جفت لکس.

مقدمه

معادله‌ی شرودینگر، اساسی‌ترین معادله‌ی غیر نسبیتی در مکانیک کوانتومی برای توصیف تحول یک ذره است، که غالباً توصیف حرکت موجی شکل ذرات کوچک مانند الکترون در هسته‌ی اتم به کار می‌رود. لویی دوبروی [۱] ، فیزیکدان فرانسوی در سال ۱۹۲۴ کشف کرد که ذرات ماده نیز مانند فوترون‌های نور علاوه بر رفتار ذره‌ای، رفتار موجی هم از خود بروز می‌دهند. بر مبنای همین یافته‌ها بود که یک فیزیکدان اتریشی به نام اروین شرودینگر [۲] درصدد برآمد که معادله‌ی موج حاکم بر این ”امواج ماده“ را پیدا کند.

[۱] Louis-de Broglie
[۲] Erwin-Schrödinger

جفت لکس معادله‌ی ماتریسی غیرخطی شرودینگر $(MNLS)$

معادلات خطی

$$\Psi_x = U\psi, \qquad \Psi_t = V\Psi,$$

را در نظر بگیرید. که Ψ یک بردار $(p+q)$ عنصری، U و V ماتریس‌های $(p+q)\times(p+q)$ می‌باشند. از شرط سازگاری معادله‌ی فوق که $\Psi_{xt}=\Psi_{tx}$ داریم:

$$U_t - V_x + [U,V] = 0.$$

U و V را جفت لکس، معادله‌ی فوق را شرط انحنا-صفر یا معادله‌ی لکس [۳] می‌نامیم. شکل جفت لکس را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

[۳] Lax equation

$$U = i\zeta \begin{pmatrix} -I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix},$$

و

$$V = i\zeta^2 \begin{pmatrix} -2I_1 & 0 \\ 0 & 2I_2 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 0 & 2Q \\ R & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ i \begin{pmatrix} -QR & Q_x \\ -R_x & RQ \end{pmatrix}.$$

که ζ یک پارامتر طیفی نسبت به زمان مستقل می‌باشد $(\zeta_t = 0)$. همچنین I_1 و I_2 ماتریس‌های همانی از ابعاد $(p \times p)$ و $(q \times q)$، Q و R به ترتیب ماتریس‌های $(p \times q), (q \times p)$ می‌باشند.

با جایگذاری مجموعه معادله‌های ماتریسی زیر را خواهیم داشت

$$iQ_t + Q_{xx} - 2QRQ = 0,$$
$$iR_t - R_{xx} + 2RQR = 0.$$

که تحت شرط

$$R = \epsilon Q^\dagger,$$

به معادله‌ی $MNLS$

$$iQ_t + Q_{xx} - 2\epsilon QQ^\dagger Q = 0, \qquad \epsilon = \pm 1,$$

تبدیل می‌شود.

روش پراکندگی معکوس

مسئله‌ی پراکندگی معکوس متناظر با ماتریس فوق در ابعاد $2n \times 2n$، $\epsilon = -1$ و شرایط کرانداری

$$Q(x,t), R(x,t) \to 0 \qquad x \to \pm\infty,$$

را در نظر می‌گیریم با شرط اولیه

$$Q, R(= -Q^\dagger) \to 0 \quad x \to \pm\infty,$$

می‌باشد. Q و R را ماتریس‌های مربعی $n \times n$ و I_1 و I_2 را ماتریس‌های همانی که با I نشان می‌دهیم، در نظر گرفتیم. معادلات انتگرالی متناظر با توابع جاست $\bar{\psi}$ و ψ را

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + \int_x^\infty K(x,s) e^{i\zeta s} \mathrm{d}s,$$

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} + \int_x^\infty \bar{K}(x,s) e^{-i\zeta s} \mathrm{d}s,$$

در نظر می‌گیریم. با جایگذاری روابط فوق در اولین جفت لکس داریم

$$-2K_1(x,x,t) = Q(x,t).$$

می‌خواهیم معادلات ژلفاند-لاویتان-مرچنکو [1] پیدا کنیم.

$$K(x,y,t) - \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \bar{F}(x+y,t)$$
$$- \int_x^\infty \bar{K}(x,s,t) \bar{F}(s+y,t) \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

و

$$\bar{K}(x,y,t) + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} F(x+y,t)$$
$$+ \int_x^\infty K(x,s,t) F(s+y,t) \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

که برای $(y > x)$ برقرار است.

$$F(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi x + 4i\xi^2 t} B(\xi,0) A(\xi,0)^{-1} \mathrm{d}\xi$$
$$-i \sum_{j=1}^N C_j(0) e^{i\zeta_j x + 4i\zeta_j^2 t},$$

[1] Gel'fand-Lavitan-Merchenko Equation

و

$$\bar{F}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}e^{-i\xi x-4i\xi^2 t}\bar{B}(\xi,0)\bar{A}(\xi,0)^{-1}\mathrm{d}\xi$$
$$+i\sum_{k=1}^{\bar{N}}\bar{C}_k(0)e^{-i\bar{\zeta}_k x-4i\bar{\zeta}_k^2 t},$$

در نتیجه

$$K_1(x,y;t)=i\sum_{k=1}^{N}P_k(x;t)C_k(t)^{\dagger}e^{-i\zeta_k^*(x+y)},$$

که

$$P_k(x,t)-\sum_{L=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{P_L(x,t)C_L(t)^{\dagger}C_j(t)e^{2i(\zeta_j-\zeta_L^*)x}}{(\zeta_j-\zeta_k^*)(\zeta_j-\zeta_L^*)}=I.$$

ماتریس S را با رابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم

$$S_{L,k}\equiv\delta_{L,k}I$$
$$-\sum_{j=1}^{N}\frac{e^{2i(\zeta_j-\zeta_L^*)x}}{(\zeta_j-\zeta_k^*)(\zeta_j-\zeta_L^*)}C_L^{\dagger}(t)C_j(t),\qquad 1\le k,L\le N.$$

معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$(P_1\ P_2\ \cdots\ P_N)\begin{pmatrix}s_{11}&\cdots&s_{1N}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ s_{N1}&\cdots&s_{NN}\end{pmatrix}=(\underbrace{I\ I\ \cdots\ I}_{N}).$$

جواب N سولیتونی معادله‌ی $MNLS$

$$Q(x,t)=-2i\sum_{k=1}^{N}P_k(x,t)C_k^{\dagger}(t)e^{-2i\zeta_k^* x},$$

و یا

$$Q(x,t)=-2i(\underbrace{I\ I\ \cdots\ I}_{N})S^{-1}\begin{pmatrix}C_1^{\dagger}(t)e^{-2i\zeta_1^*}\\ C_2^{\dagger}(t)e^{-2i\zeta_2^*}\\ \vdots\\ C_N^{\dagger}(t)e^{-2i\zeta_N^* x}\end{pmatrix},$$

می‌باشد.

جواب تک سولیتونی

در معادله‌ی فوق با قرار دادن $N=1$ جواب تک سولیتونی $MNLS$ به صورت زیر می‌باشد

$$Q(x,t)=-2i\Big(I-\frac{e^{4i(\zeta_1^2-{\zeta^*}_1^2)t}}{(\zeta_1-\zeta_1^*)^2}C_1^{\dagger}(0)C_1(0)e^{2i(\zeta_1-\zeta_1^*)x}\Big)^{-1}$$
$$\times\Big(C_1(0)^{\dagger}e^{-2i\zeta_1^* x-4i{\zeta^*}_1^2 t}\Big).$$

مراجع

[۱] Segur، H. and Ablowitz J. M. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*، SIAM، Philadelphia، ۱۹۸۱.

[۲] M. Wadati and T. Tsuchida، *The coupled modified Korteweg-de Vrise equation*، J. Phys. Soc. Jpn، ۶۷، (۱۹۹۷)، ۱۱۷۵-۱۱۸۷.

[۳] K. Konno and H. Oono، *New coupled integrable dispersionless equations*، J. Phys. Soc. Jpn، ۶۳، (۱۹۹۴)، ۳۷۷ - ۳۷۸.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۷-۴ شهریور ۱۳۹۳

معادلات دیفرانسیل خطی با مقادیر مرزی فازی

مصطفی شمس الدینی فرد، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه دامغان، m.shamsodini@std.du.ac.ir

رضا بابائی، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی، دانشگاه دامغان، babaeireza055@gmail.com

چکیده: در این مقاله معادلات دیفرانسیل خطی با مقادیر مرزی را در نظر خواهیم گرفت. ما راه‌حل مسأله‌ای در عباراتی از یک مجموعه‌ی فازی از تابع‌های حقیقی موج‌دار را بیان می‌کنیم. هر تابع حقیقی در راه‌حل مجموعه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل خطی صدق می‌کند و مقادیر مرزی آن به فاصله‌ها وابسته است و با اعداد فازی متناظر تعیین می شود. کمترین احتمال در میان مقادیر مرزی ممکن در مجموعه‌های فازی متناظر به‌صورت احتمالی از تابع حقیقی در راه‌حل فازی تعریف شده است. بر این اساس، برای پیدا کردن راه‌حل فازی ما یک روش مبتنی بر تبدیلات خطی پیشنهاد می‌کنیم. ما نشان می‌دهیم که اگر متناظراً مسأله موج دار یک راه‌حل منحصربه‌فرد داشته باشد، آن‌گاه مسأله‌ی فازی نیز راه‌حل منحصربه‌فردی دارد. ما همچنین ثابت می‌کنیم که اگر مقادیر مرزی، اعداد فازی مثلثی باشند، آن‌گاه مقداری از راه‌حل در هر زمان، خود نیز یک عدد فازی مثلثی خواهد بود. ما پی خواهیم برد که، راه‌حل فازی به روش ما، با همان درستی که از راه‌حل مسأله‌ی موج‌دار با کاربرد اصل اضافی بدست آمده است، تعیین می‌شود. ما با شرح یک مثال روش پیشنهادی را ارائه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مسأله مقدار مرزی، مجموعه‌ی فازی، تبدیل خطی

مقدمه

روش ما برای مسائل مقدار مرزی فازی می‌تواند هر دو نوع باشد. در روش اول فرض کنید که، حتی اگر تنها مقادیر مرزی در بررسی مسأله فازی باشند، راه‌حل تابع فازی خواهد بود. در نتیجه مشتق در معادله دیفرانسیل می تواند به‌صورت یک مشتق از تابع فازی در نظر گرفته شود. این مشتق می‌تواند، مشتتق هوکوهارا [۱] یا مشتقی در مفاهیم تعمیم یافته باشد. بِد [۲] [۱] نشان داد که اگر مشتق هوکوهارا مورد استفاده باشد، آنگاه رده‌ی بزرگی از مسائل مقدار مرزی فازی راه‌حل ندارند.

برای غلبه بر این مشکل در [۲] و [۳] مفهوم مشتق تعمیم یافته گسترش داده شده است، و به‌کار بردن این مفهوم در معادلات دیفرانسیل فازی بررسی شده است. اخیراً خاستن [۳] و نایتو [۴] راه‌حل هایی برای رده‌ای به اندازه‌ی کافی بزرگ از مسائل مقدار مرزی با استفاده از مشتق

[۱] Hukuhara
[۲] Bede
[۳] Khastan
[۴] Nieto

تعمیم یافته پیدا کرده‌اند. اگر چه این در مثال‌های ذکر شده مشاهده شده است، اما این راه‌حل‌ها برای تفسیر کردن مشکل هستند. زیرا چهار مسأله متفاوت بدست آمده اغلب با به‌کار بردن مشتقات مرتبه دوم تعمیم یافته نمی‌توانند ماهیت مسأله را منعکس کنند. روش دوم مبتنی بر تولید راه‌حل فازی از راه‌حل موج دار است. در حالت خاص برای مسأله‌ی مقدار اولیه فازی این روش می‌تواند از سه راه باشد.

راه اول استفاده از اصل اضافی است. در این روش مقدار اولیه به‌صورت یک ثابت حقیقی گرفته می‌شود، و نتیجه‌ی مسأله موج‌دار حل شده است. بنابراین ثابت حقیقی در راه‌حل با مقدار اولیه جایگزین شده است. در راه‌حل نهایی، عمل‌های حساب‌گر، عمل‌های روی اعداد فازی در نظر گرفته شده‌اند. راه دوم ارائه شده توسط هولیمریر [5] می‌باشد که از مفهوم شمول دیفرانسیل استفاده می‌کند. در این روش با گرفتن یک برش α از مقدار اولیه، معادله دیفرانسیل داده شده به یک شمول دیفرانسیل برگردانده شده است. و راه‌حل به‌دست آمده به‌صورت برش α از راه‌حل فازی پذیرفته شده است. میسکوشی [6] و همکارانش [۴] ثابت کردند که، تحت شرایط مطمئنی، دو راه اصلی از روش مسأله مقدار اولیه معادلند. راه سوم توسط گاسیلاو [7] و همکارانش [۵] ارائه شده است. در این روش مسأله فازی به‌صورت یک مجموعه از مسائل موج‌دار در نظر گرفته شده است. در این مقاله ما یک معادله دیفرانسیل را با مقادیر مرزی فازی بررسی کردیم. ما مسأله را به‌صورت یک مجموعه از مسائل موج‌دار تفسیر کردیم. برای معادلات خطی ما روشی مبتنی بر ویژگی‌های تبدیلات خطی را پیشنهاد می‌کنیم.
ما نشان می‌دهیم که اگر راه‌حل متناظر مسأله موج‌دار وجود داشته باشد و منحصر به‌فرد باشد، مسأله‌ی فازی نیز راه‌حلی منحصر به‌فرد دارد. به‌علاوه ما ثابت خواهیم کرد که اگر مقادیر مرزی اعداد فازی مثلثی باشند، آن‌گاه مقدار راه‌حل یک عدد فازی مثلثی در هر زمان خواهد بود. ما روش پیشنهاد شده را روی مثال توضیح خواهیم داد.

مسأله مقدار مرزی فازی

در زیر ما نماد $\tilde{u} = (u_L(r),\ u_R(r))$ را که در آن $۰ \le r \le ۱$، برای نشان دادن یک عدد فازی در شکل پارامتری استفاده می‌کنیم. ما به‌ترتیب $\underline{u} = u_L(۰)$ و $\overline{u} = u_R(۰)$ را برای نشان دادن حدود چپ و راست $\tilde{u}$ مشخص می‌کنیم. ما یک عدد فازی مثلثی را به‌صورت $\tilde{u} = (l,\ m,\ r)$ در جایی که ما داریم $\underline{u} = l$ و $\overline{u} = r$، نشان می‌دهیم. در این مقاله ما یک مسأله مقدار مرزی فازی $(FBVP)$ [8] را با معادله دیفرانسیل خطی موج‌دار اما با مقادیر مرزی فازی در نظر گرفته‌ایم. برای روشن شدن ما معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} x'' + a_۱(t)x' + a_۲(t)x = f(t) \\ x(۰) = \tilde{A} \\ x(T) = \tilde{B} \end{cases} \qquad (۱)$$

ما توجه می‌کنیم که ضرایب معادله دیفرانسیل لزوماً ثابت نیستند. فرض کنید که مقادیر مرزی را به‌صورت $\tilde{A} = a_{cr} + \tilde{a}$ و $\tilde{B} = b_{cr} + \tilde{b}$ نشان می‌دهیم، در این‌جا a_{cr} و b_{cr} برادرهایی با احتمال یک هستند، قسمت‌های موج‌دار $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ نشان داده شده‌اند.؛ و $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ قسمت‌های نامعلومی با رئوس در مبدأ، مشخص شده‌اند. ما مسأله‌ی(۱) را به دو مسأله‌ی زیر می‌شکافیم:
۱) مسأله موج‌دار وابسته (که ناهمگن است):

[5] Hullemerier
[6] Misukoshi
[7] Gasilov
[8] fuzzy boundary value problem

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = f(t) \\ x(0) = a_{cr} \\ x(T) = b_{cr} \end{cases} \qquad (۲)$$

۲) مسأله همگن با مقادیر مرزی فازی:

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \\ x(0) = \tilde{a} \\ x(T) = \tilde{b} \end{cases} \qquad (۳)$$

مشاهده‌ی این آسان است که یک راه‌حل مسأله داده شده (۱) به شکل $x(t) = x_{cr}(t) + x_{un}(t)$ (راه‌حل موج‌دار+تردید) است. در این‌جا $x_{cr}(t)$ یک راه‌حل مسأله‌ی موج‌دار ناهمگن (۲) است. در حالی که $x_{un}(t)$ یک راه‌حل مسأله‌ی همگن (۳) با شرایط مرزی فازی است. $x_{cr}(t)$ می‌تواند با مفاهیمی از روش‌های عددی یا تحلیلی محاسبه شود. از این‌رو (۱) به حل یک معادله‌ی همگن با شرایط مرزی فازی (۳) کاهش یافته است. بنابراین ما می‌خواهیم چگونگی حل این مسأله را بررسی کنیم. ما فرض می‌کنیم که راه‌حل x_{un} از (۳) یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{X}$ از توابع حقیقی مثل $x(t)$ باشد. هر تابع $x(t)$ بایددر معادله‌ی دیفرانسیل صدق کند، و باید مقادیر مرزی a و b را به‌ترتیب از مجموعه‌های $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ داشته باشد. ما احتمال تابع $x(t)$ را معادل با کمترین احتمال مقادیر مرزی آن تعریف می‌کنیم. از نظر ریاضی، مجموعه راه‌حل‌های فازی می‌تواند به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\tilde{X} = \{x(t) \mid x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0;\ x(0) = a;\ x(T) = b;\ a \in \tilde{a};\ b \in \tilde{b}\}$$

با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{X}}(x(t)) = min\{\mu_{\tilde{a}}(a);\ \mu_{\tilde{b}}(b)\}$$

راه‌حل تعریف شده در بالا می‌تواند به‌صورت یک دسته‌ی فازی از توابع تفسیر شده باشد. همچنین می‌توان این‌گونه تفسیر کرد که، ما یک $FBVP$ را به‌صورت یک مجموعه از مجموعه از BVP موج دار در نظر می‌گیریم. که مقادیر مرزی آن به مجموعه‌های فازی $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ وابسته باشد.

آ. یک نمایش برداری راه‌حل حالت موج‌دار

در این‌جا ما BVPهای موج‌دار را برای معادله‌ی دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم در نظر گرفته‌ایم

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \\ x(0) = a \\ x(T) = b \end{cases} \qquad (۶)$$

فرض کنید $x_1(t)$ و $x_2(t)$ راه‌حل‌هایی مستقل خطی از معادله‌ی دیفرانسیل باشند. در این صورت راه‌حل کلی به‌صورت $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ است. برای c_1 و c_2 ما دستگاه خطی زیر را داریم.

$$\begin{cases} c_1x_1(0) + c_2x_2(0) = a \\ \\ c_1x_1(T) + c_2x_2(T) = b \end{cases} \qquad (۷)$$

در زیر ما یک ماتریس نمایش برای راه‌حل BVP بدست آورده‌ایم. ما دستگاه خطی (۷) را به شکل ماتریس بازنویسی می‌کنیم. $Mc = u$ که در این‌جا $M = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1(T) & x_2(T) \end{bmatrix}$، $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$، $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ، راه‌حل دستگاه خطی

$$c = M^{-1}u \qquad (۸)$$

می‌باشد.ما یک تابع را از راه‌حل‌های مستقل خطی تشکیل می‌دهیم $s(t) = [x_1(t) \ \ x_2(t)]$. بنابراین راه‌حل کلی می‌تواند به‌شکل ماتریس به‌صورت زیر بازنویسی شود.

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = s(t)c$$

با استفاده از(۸) داریم $x(t) = s(t)M^{-1}u$ یا

$$x(t) = W(t) \ u = w_1(t)a + w_2(t)b \qquad (۹)$$

که در این‌جا

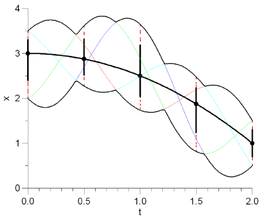
$$W(t) = s(t)M^{-1} \qquad (۱۰)$$

مثال۱: $FBVP$ زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x'' + 16x = 47 - 8t^2 \\ x(0) = (2,\ 3,\ 3/5) \\ x(2) = (0/5,\ 1,\ 1/5) \end{cases} \qquad (۱۱)$$

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

حل: مسأله ناهمگن موج‌دار وابسته‌ی $\begin{cases} x'' + 16x = 47 - 8t^2 \\ x(0) = 3 \\ x(2) = 1 \end{cases}$ راه‌حل $x_{cr}(t) = 3 - 0{,}5t^2$ (خط مشکی پر رنگ در شکل۱) را دارد.



شکل۱. خطوط تیره و تیره‌ی پر رنگ‌تر بترتیب مقادیر فازی و $\alpha = 0{,}6$-برش آن‌ها در زمان‌های متفاوت

برای پیدا کردن قسمت نامعلوم راه‌حل فازی $\tilde{x}_{un}(t)$، ما مسأله همگن فازی $\begin{cases} x'' + 16x = 0 \\ x(0) = (-1,\ 0,\ 0{,}5) \\ x(2) = (-0{,}5,\ 0,\ 0{,}5) \end{cases}$ را حل خواهیم کرد. $x_1(t) = \cos 4t$ و $x_2(t) = \sin 4t$ راه‌حل‌های مستقل خطی برای معادله دیفرانسیل هستند. بنابراین $s(t) = [\cos 4t \quad \sin 4t]$، $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos 8 & \sin 8 \end{bmatrix}$ و $W = s(t)M^{-1} = \frac{1}{\sin 8}[\sin(8 - 4t) \quad \sin 4t]$. با استفاده از فرمول $\tilde{X}(t) = w_1(t)\tilde{a} + w_2(t)\tilde{b}$ ما راه‌حل مسأله همگن و نیز راه‌حل موج‌دار را بدست می‌آوریم و به حل $FBVP$ داده شده می‌رسیم:

$$\tilde{x} = 3 - 0{,}5t^2 + \frac{1}{\sin 8}(\sin(8 - 4t)(-1,\ 0,\ 0{,}5) + \sin 4t(-0{,}5,\ 0,\ 0{,}5))$$

راه‌حل فازی یک نوار را در صفحه‌ی tx تولید می‌کند (شکل۱).

نتایج

در این مقاله ما مسأله‌ی مقدار مرزی فازی را به‌صورت مجموعه‌ای از مسائل موج‌دار بررسی کردیم. ما روش راه‌حلی بر اساس ویژگی‌های تبدیلات خطی را پیشنهاد دادیم. برای روشن شدن موضوع ما روش پیشنهاد شده را برای معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه دو شرح دادیم. ما نشان دادیم که راه‌حل فازی به روش ما با راه‌حل توسط اصل اضافی همزمان خواهد بود.

مراجع

[1] B. Bede, A. note on, *two-point boundary value problems associated with non-linear fuzzy differential equations*,Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006) 986-989.

[2] B. Bede, S.G. Gal, *Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equation*. Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005) 581-599.

[3] Y. Chalco-Cano, H. Rom´an-Flores, *On the new solution of fuzzy differential equations*, Chaos, Solitons, Fractals, 38 (2006) 112-119.

[4] M. Misukoshi, L.C. Barros, Y. Chalco-Cano, H. Rom´an-Flores, R.C. Bassanezi, *Fuzzy differential equations and the extension principle*, Inform. Sci., 177 (2007) 3627-3635.

[5] N.A. Gasilov, S.E. Amrahov, A.G. Fatullayev, *A geometric approach to solve fuzzy linear systems of differential equations*, Appl. Math. Inf. Sci., 5 (2011) 484-495.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

Adomian decomposition method for fuzzy convection-diffusion equation

A. Fallahzadeh*, Department of Mathematics, Islamic Azad University
Central Tehran Branch, P.O. Box 13185.768, Tehran, Iran, amir_falah6@yahoo.com
M.A. Fariborzi Araghi

Abstract: In this paper, the Adomian decomposition method (ADM) is applied to obtain the approximate solution of fuzzy convection-diffusion equation (FCDE). The analytical-approximate solution of this equation by Adomian decomposition method (ADM) is offered.

Keywords: Adomian decomposition method, Fuzzy differential equation, Convection-diffusion equation.

1 Introduction

The Adomian decomposition method is a powerful method to solve the linear or nonlinear differential or integral equations [3, 19].

Convection diffusion equation (CDE) is a combination of the diffusion and convection equations, and describes physical phenomena where particles, energy, or other physical quantities are transferred inside a physical system due to two processes. This equation is solved by many methods such as finite difference method and Alternating Group Iterative Method [14, 22].

In recent years, some numerical and analytical methods were proposed in order to solve fuzzy differential equations such as [1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 16]. In this work, we consider the following fuzzy case of convection-diffusion equation and apply the ADM to solve it.

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le l, t \ge 0, \qquad (1)$$

with the initial condition,

$$\widetilde{u}(x,0) = \widetilde{f}(t), \quad 0 \le x \le l, \qquad (2)$$

where $\widetilde{u}(x,t)$ is unknown fuzzy function, $\widetilde{f}(x)$ is known fuzzy function, and α, γ are known crisp constants.

In section 2, we remind some fuzzy concepts briefly, then in section 3, we apply the ADM for FCDE, in section 4, we solve two examples and offer the analytical- approximate of them by ADM.

2 Preliminaries

In this section, we recall some basic definitions of fuzzy sets theory mentioned in [8, 11, 12, 13, 17, 18, 20].

Definition 2.1. A fuzzy parametric number u is a pair $(\underline{u}(r), \overline{u}(r))$, $0 \le r \le 1$, which satisfy the following requirements :

1. $\underline{u}(r)$ is a bounded left continuous non-decreasing function over $[0, 1]$.

*Corresponding Author

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

2. $\overline{u}(r)$ is a bound left continuous non-increasing function over $[0,1]$.

3. $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r),\ 0 \leq r \leq 1$.

Remark 2.1. Note that by the above definition a fuzzy function is i-differentiable or ii-differentiable of order n if $f^{(s)}$ for $s = 1, \ldots, n$ is i-differentiable or ii-differentiable. It is possible that the different orders have different kind i or ii differentiability.

For a given fuzzy function f ,we have two possibilities according to the definition 2.5 to obtain the derivative of f at t: $D_1(f(t)), D_2(f(t))$.

Then for each of these two derivatives, we have again two possibilities:

$D_1(D_1(f(t)) = D^2_{1,1}(f(t))$, $D_2(D_1(f(t)) = D^2_{2,1}(f(t)$

and

$D_1(D_2(f(t)) = D^2_{1,2}(f(t))$, $D_2(D_2(f(t)) = D^2_{2,2}(f(t)$.

In similar we consider the n-order differential of f. For example

$$D^3_{1,2,1}(f(t)) = D_1(D_2(D_1(f(t)))).$$

3 The Adomian decomposition method for FCDE

In this case, we apply ADM to solve the Eq.(1). According to the definition 2.1 with assumption that $\widetilde{u}$ is i-differentiable in terms of x, t, we rewrite the Eq.(1) in the following form,

$$(\underline{u}_t, \overline{u}_t) + \alpha(\underline{u}_x, \overline{u}_x) = \gamma(\underline{u}_{xx}, \overline{u}_{xx}), \tag{3}$$

with the initial condition,

$$\widetilde{u}(x, 0) = (\underline{f}(x), \overline{f}(x)). \tag{4}$$

We consider the following cases, by attention to the signs of α and γ:

1. If α and $\gamma > 0$,

$$\begin{cases} \underline{u}_t + \alpha\underline{u}_x = \gamma\underline{u}_{xx} \\ \overline{u}_t + \alpha\overline{u}_x = \gamma\overline{u}_{xx} \end{cases} \tag{5}$$

2. If $\alpha > 0$ and $\gamma < 0$,

$$\begin{cases} \underline{u}_t + \alpha\underline{u}_x = \gamma\overline{u}_{xx} \\ \overline{u}_t + \alpha\overline{u}_x = \gamma\underline{u}_{xx} \end{cases} \tag{6}$$

3. If $\alpha < 0$ and $\gamma > 0$,

$$\begin{cases} \underline{u}_t + \alpha\overline{u}_x = \gamma\underline{u}_{xx} \\ \overline{u}_t + \alpha\underline{u}_x = \gamma\overline{u}_{xx} \end{cases} \tag{7}$$

4. If α and $\gamma < 0$,

$$\begin{cases} \underline{u}_t + \alpha\overline{u}_x = \gamma\overline{u}_{xx} \\ \overline{u}_t + \alpha\underline{u}_x = \gamma\underline{u}_{xx}. \end{cases} \tag{8}$$

And initial conditions,

$$\underline{u}(x, 0) = \underline{f}(x), \quad \overline{u}(x, 0) = \overline{f}(x). \tag{9}$$

According to the description of the ADM, we consider $\underline{u} = \sum_{m=0}^{+\infty} \underline{u}_m$ and $\overline{u} = \sum_{m=0}^{+\infty} \overline{u}_m$. Then, we solve the given systems of partial differential equations (5)-(8).

Hence, we consider,

$$\underline{u}_0 = \underline{f}, \quad \overline{u}_0 = \overline{f}. \tag{10}$$

For $m \geq 1$,

in case.1:

$$\begin{aligned} \underline{u}_m &= \int_0^t (-\alpha\frac{\partial\underline{u}_{m-1}}{\partial x} + \gamma\frac{\partial^2\underline{u}_{m-1}}{\partial x^2})d\tau, \\ \overline{u}_m &= \int_0^t (-\alpha\frac{\partial\overline{u}_{m-1}}{\partial x} + \gamma\frac{\partial^2\overline{u}_{m-1}}{\partial x^2})d\tau, \end{aligned} \tag{11}$$

in case.2:

$$\begin{aligned} \underline{u}_m &= \int_0^t (-\alpha\frac{\partial\underline{u}_{m-1}}{\partial x} + \gamma\frac{\partial^2\overline{u}_{m-1}}{\partial x^2})d\tau, \\ \overline{u}_m &= \int_0^t (-\alpha\frac{\partial\overline{u}_{m-1}}{\partial x} + \gamma\frac{\partial^2\underline{u}_{m-1}}{\partial x^2})d\tau, \end{aligned} \tag{12}$$

in case.3:

$$\begin{aligned} \underline{u}_m &= \int_0^t (-\alpha\frac{\partial\overline{u}_{m-1}}{\partial x} + \gamma\frac{\partial^2\underline{u}_{m-1}}{\partial x^2})d\tau, \\ \overline{u}_m &= \int_0^t (-\alpha\frac{\partial\underline{u}_{m-1}}{\partial x} + \gamma\frac{\partial^2\overline{u}_{m-1}}{\partial x^2})d\tau, \end{aligned} \tag{13}$$

in case.4:

$$\begin{aligned} \underline{u}_m &= \int_0^t (-\alpha\frac{\partial\overline{u}_{m-1}}{\partial x} + \gamma\frac{\partial^2\overline{u}_{m-1}}{\partial x^2})d\tau, \\ \overline{u}_m &= \int_0^t (-\alpha\frac{\partial\underline{u}_{m-1}}{\partial x} + \gamma\frac{\partial^2\underline{u}_{m-1}}{\partial x^2})d\tau. \end{aligned} \tag{14}$$

In other case of differentiability of $\widetilde{u}$ in terms of x or t, we can construct other four cases, similar to the (11)-(14).

4 Numerical examples

In this case, we solve two sample fuzzy convection-diffusion equations by ADM .

Example 4.1. We consider Eq.(1) with $\alpha = 0.0001, \gamma = 1.0001$ and $\widetilde{f}(x) = ((2r^2-1)e^x, (2-r)e^x)$, also we suppose $\widetilde{u}(x,t)$ is i-differentiable in terms of x, t, and consider Eq.(11). By applying ADM and choosing $\widetilde{u}_0 = ((2r^2-1)e^x, (2-r)e^x)$, we have,

$$\widetilde{u}_1 = ((2r^2-1)e^x t, (2-r)e^x t),$$
$$\widetilde{u}_2 = ((2r^2-1)e^x(\frac{1}{2}t^2), (2-r)e^x(\frac{1}{2}t^2)),$$
$$\widetilde{u}_3 = ((2r^2-1)e^x(\frac{1}{6}t^3), (2-r)e^x(\frac{1}{6}t^3)),$$
$$\vdots$$

In general $\widetilde{u} = \widetilde{u}_0 + \widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2 + \cdots$, that it converges to the exact solution $\widetilde{u} = ((2r^2-1)e^{x+t}, (2-r)e^{x+t})$.

Example 4.2. In this example we consider Eq.(1) with $\alpha = 0, \gamma = -1$ and $\widetilde{f}(x) = ((4r-3)e^x, (2-r^2)e^x)$, also we suppose $\widetilde{u}(x,t)$ is ii-differentiable in terms of t and i-differentiable in terms of x. Therefore,

$$\begin{aligned} \overline{u}_t &= -\overline{u}_{xx} \\ \underline{u}_t &= -\underline{u}_{xx}. \end{aligned} \tag{15}$$

By applying ADM, we construct following formulas,

$$\begin{aligned} \overline{u}_m &= \int_0^t (-\gamma \frac{\partial^2 \overline{u}_{m-1}}{\partial x^2}) d\tau, \\ \underline{u}_m &= \int_0^t (-\gamma \frac{\partial^2 \underline{u}_{m-1}}{\partial x^2}) d\tau, \end{aligned} \tag{16}$$

Therefore, by choosing $\widetilde{u}_0 = ((4r-3)e^x, (2-r^2)e^x)$, the ADM gives us the following results,

$$\underline{u}_1 = (4r-3)e^x(-t), \quad \overline{u}_2 = (2-r^2)e^x(-t),$$
$$\underline{u}_2 = (4r-3)e^x(\frac{1}{2}t^2), \quad \overline{u}_2 = (2-r^2)e^x(\frac{1}{2}t^2),$$
$$\underline{u}_3 = (4r-3)e^x(-\frac{1}{6}t^3), \quad \overline{u}_3 = (2-r^2)e^x(-\frac{1}{6}t^3),$$
$$\vdots$$

In general $\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \cdots$, and $\overline{u} = \overline{u}_0 + \overline{u}_1 + \overline{u}_2 + \cdots$. That it converges to the exact solution $\widetilde{u} = ((4r-3)e^{x-t}, (2-r^2)e^{x-t})$.

5 Conclusion

In this work, we applied the Adomian decomposition method to obtain the analytical-approximate solutions of fuzzy convection-diffusion equation, and we compared the results with the exact solutions to show the efficiency of these method.

Aknowledgements

The authors are thankful to the Islamic Azad University, central Tehran branch.

References

[1] S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, Numerical solution of fuzzy differential equation by Taylor method, Journal of Computational Methods in applied Mathematics 2, (2002) 113-124.

[2] S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, O. Loez-Pouso, J.J. Nieto, Numerical methods for fuzzy differential inclusions, Journal of Computer and Mathematics with Applications 48, (2004) 1633-1641.

[3] G. Adomian, R. Rach, Equality of partial solutions in the decomposition method for linear or nonlinear partial differential equations, Comput. Math. Anal. Appl, 19 (12) (1990) 9-12.

[4] T. Allahviranloo, N. Ahmadi, E. Ahmadi, Numerical solution of fuzzy differential equations by predictor-corrector method, Information Sciences, 177 (2007) 1633-1647.

[5] T. Allahviranloo, E. Ahmadi, A. Ahmadi, *N*-th fuzzy differential equations. Information Sciences, 178 (2008) 1309-324.

[6] T. Allahviranloo, N.A. Kiani, N. Motamedi, Solving fuzzy differential equations by differential transformation method, Information Sciences, 179(7) (2009) 956-966.

[7] J.J. Buckley,T. Feuring, Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets Syst, 110 (2000) 43-54.

[8] B. Bede, S.G. Gal, Generalizations of the differentiability of fuzzy number value functions with applications to fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005) 581-599.

[9] A. Bratsos, M. Ehrhardt and I.Th.Famelis, A discrete Adomian decomposition method for discrete nonlinear Schrdinger equations, Appl. Math. Comput, 197 (2008), 190-205.

[10] Y.Chalco-Cano, H.Roman-Flores, Comparision between some approaches to solve the fuzzy differential equations, Fuzzy sets and systems, 160 (2009) 1517-1562.

[11] Y. Chalco-Cano, H. Roman-Flores, On new solutions of fuzzy differential equations, Chaos, Solitons & Fractals, 38 (2006) 112-119.

[12] W. Cong-xin, M. Ming, Embedding problem of fuzzy number space: I, Fuzzy Sets SYst, 44 (1991) 33-38.

[13] R.Goetschel, W. Voxman, Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets Syst, 18 (1986) 31-43.

[14] D. Khojasteh, On the finite difference approximation to the convection-diffusion equation. Applied mathematics and computation, 179 (2006) 79-86.

[15] V. Lupulescu, On a class of fuzzy functional differential equations, Fuzzy sets and systems, 160 (2009) 1547-1562.

[16] S.Ch. Palligkinis, G. Papageorgiou, I.Th. Famelis, Runge-Kutta methods for fuzzy differential equations, Applied mathematics and computation, 209 (2009) 97-105.

[17] M.L. Puri, D. Ralescu, Fuzzy random variables, J. Math.Anal.Appl, 114 (1986) 409-422.

[18] S. Seikkala, On the fuzzy initial value problem, Fuzzy set and Systems, 24 (1987) 319-330.

[19] A.M. Wazwaz, S.L.El-Sayed, A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators, Appl. Math. Comput, 122 (2001) 393-405.

[20] H.J. Zimmerman, Fuzzy set theory and its applications, Kluwer Academic, New York, 1996.

[21] H. Zhu, H. Shu and M. Ding, Numerical solutions of two-dimensional Burgers' equations by discrete Adomian decomposition method, Comput. Math. Appl, 60 (2010) 840-848.

[22] B. Zheng, Alternating Group Iterative Method for Convection- diffusion Equations. Applied Mathematical Sciences, 3 (2009) 21 1011- 1016

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

An Analysis of Kolmogrove System: Coexistence Model

M.H. Rahmani Doust,* Academic member, Department of Mathematics, University of Neyshabur, Neyshabur, Iran.
mh.rahmanidoust@neyshabur.ac.ir
F. Mozafari, M.Sc., Department of Mathematics, University of Ilam, Ilam, Iran.
fereshte65@ymail.com

Abstract: Description of relationships between species in the nature by a system of differential equations is the applied areas, especially, in mathematical ecology. Some scientists try to find out a general method to describe the above relationships. Kolmogorov worked out to achieve an overall relationship by analyzing of relationships between species in 1936. The present article studies the environment which is included two coexistence species. It is assumed that there is intergroup competition to obtain the food and habitats. The employed method is linearization. Finally, an analysis for the equilibrium points is presented.

Keywords: Equilibrium point, Kolmogorov equations, Coexistence species, Asymptotically stable.

1 INTRODUCTION

There are situations in which the interaction of two species is mutually beneficial. One of the examples is coexistence between remora fish and shark. In fact, in this coexistence one of species benefits to other. And also, another species does not hurt. Kolmogorov could describe this type of the interactions by one general system of differential equations which is given as follows:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x,y) \\ \\ \frac{dy}{dt} = yg(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

where the function $x(t)$ and $y(t)$ describe the populations density of the first and the second species respectively. Two variables functions $f(x,y)$ and $g(x,y)$ represent the growth rates of the above corresponding species. By using the signs of partial derivative, the above interaction is characterized in three cases which are

i) prey-predator;
*ii)*coexistence;
iii) competition.

It is clear that if $\frac{df}{dy} > 0$ and $\frac{dg}{dx} > 0$, then the mentioned interaction of species is coexistence [4,5,6,7]. In the above model, moreover, the following assumptions are considered:
i) i) The species have mutual interactions. It means that two existing species could survive separately.
ii) i) Because of existing intergroup competition, the species can not growth unbounded.

Now, we bring the following theorem which

*Corresponding Author

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

is employed to prove the main theorem in this research.

Theorem 1.1. *Let us consider the point (x^*, y^*) as an equilibrium of the system (1). Moreover, assume that all eigenvalues of the coefficient matrix often linearization at this equilibrium have negative real parts.*
If the following inequalities are true:

$$detA = f_x(x^*, y^*)g_y(x^*, y^*) - f_y(x^*, y^*)g_x(x^*, y^*) > 0$$

and

$$traceA = f_x(x^*, y^*)g_y(x^*, y^*) < 0,$$

then the equilibrium point (x^*, y^*) is asymptotically stable [1,3].

2 MAIN RESULTS

First, consider the following initial value problem which is a special case of Kolmogorov model:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\lambda - ax + by) & x(0) = 0 \\ \\ \frac{dy}{dt} = y(\mu + cx - dy) & y(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

where the function $x(t)$ represents the population of first species x at time t and the function $y(t)$ represents the population of species y. We assumed that all of parameters a, b, c, d, λ, μ, which are positive constants, are interpreted as follows:
i) b is the effect of species y on species x;
ii) c is the effect of species x on species y a is self - limiting factor of species x;
iii) d is self - limiting factor of species y.

Some similar models are analyzed in [2,3,4,5]. The mutualism of the interaction is modeled by the positive nature of the interaction terms cx and by. In mutual interaction, the constants λ and μ are positive [2]. By using the signs of partial derivative as follow:

$$\frac{df}{dy} = b > 0$$

and

$$\frac{dg}{dx} = c > 0,$$

one can see that the model (2) is coexistence type. Similarly one can see if

$$\frac{df}{dx} = -a < 0$$

and

$$\frac{dg}{dy} = -d < 0,$$

then the intergroup competition is obvious.

Theorem 2.1. *For the mutualism system of Kolmogorov equations (2), the noun-zero equilibrium point (x^*, y^*) exists and it is asymptotically stable.*

Proof. The equilibrium point (x^*, y^*) is the intersection point of the following lines:

$$L_1 : ax^* - by^* = \lambda$$

$$L_2 : -cx^* + dy^* = \mu.$$

Thus

$$x^* = \frac{c\lambda + a\mu}{ad - bc}$$

and

$$y^* = \frac{d\lambda + a\mu}{ad - bc}.$$

By using the sign of $ad - bc$, the two cases will be appear:
i) If $ad < bc$, then there is a region of the phase plane in which solutions become unbounded. *ii)* If $ad > bc$, then the mutualism effects are smaller than the self-limiting terms in the per capita growth rates, and the slope of the x -isocline is greater than the slope of the y-isocline.

Then, the Jacobian matrix of the point (x^*, y^*) may be calculated as follows:

$$A|_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} -ax^* & bx^* \\ cy^* & -dy^* \end{pmatrix}.$$

Hence,

$$detJ = x^*y^*(ad - bc) > 0.$$

And

$$traceJ = -ax^* - dy^* < 0.$$

Thus,

$$\begin{aligned}\Delta &= (-ax^* - dy^*)^2 - 4(ad - bc)x^*y^* \\ &= (ax^* - dy^*)^2 + 4bcx^*y^*\end{aligned}$$

By using theorem (1), one can see the equilibrium (x^*, y^*) is asymptotically stable for system (2). Therefor, the proof is done. □

References

[1] F. Brauer, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, New York: Springer-verlag, (2001).

[2] F. Mozafari, *An Analysis of System of Kolmogorov Equations*, University of Ilam , Ilam, (2010).

[3] J.D. Murray, *Mathematical Biology, Volume I, An Introduction*, 3th ed., New York: Springer, (2002).

[4] M.H. Rahmani Doust, *Differential equations and Ecology*, University of Neyshabur, Neyshabur, (2013).

[5] M.H. Rahmani Doust, *Systems of Non-Linear Differential Equations and Ecology: Basic, Concepts, Methods*, Germany, Scholar Press, (2013).

[6] M.H. Rahmani Doust, *Analysis of a system of coexistence equations: Ultra Science*, Vol. 19, (1) M, 49-56, (2007).

[7] M.H. Rahmani Doust, *Analysis of a system of competition equations: Ultra Science*, Vol. 19, (2) M, 393-400, (2007).

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

Some Results of Hukuhara differerential Fuzzy Theory

Fatemeh eshghemer *and Azizollah Babakhani** , Faculty of Basic Science, Department of Mathematics, Babol University of Technology, Babol-Iran, zenabeshghemer@yahoo.com

Abstract: In this manuscript, we try to introduce some new results with using Hukuhara derivative for a class of functions defined on an interval (a, b) into fuzzy distance R_F. This idea is related to fuzzy differential equations.
Keywords: Generalized Hukuhara differentiability, Boundary value problems, Fuzzy real number, Fuzzy differential equation, Linear fuzzy differential equations.

1 Introduction

Fuzzy differential equations appear as a natural way to model the propagation of epistemic uncertainty in a dynamical environment. There are several interpretations of a fuzzy differential equation. The first one historically was based on the Hukuhara derivative introduced in Puri-Ralescu [1] and studied in several papers (Wu-Song-Lee[2], Kaleva[3], Ding-Ma- Kandel[4], Rodriguez-Lopez[5]). This interpretation has the disadvantage that solutions of a fuzzy differential equation have always an increasing length of the support. This fact implies that the future behavior of a fuzzy dynamical system is more and more uncertain in time. This phenomenon does not allow the existence of periodic solutions or asymptotic phenomena. That is why different ideas and methods to solve fuzzy differential equations have been developed. One of them solves differential equations using Zadeh's extension principle (Buckley-Feuring [6]), while another approach interprets fuzzy differential equations through differential inclusions. Differential inclusions and Fuzzy Differential Inclusions are two topics that are very interesting but they do not constitute the subject of the present work (see Diamond [7], Lakshmikantham-Mohapatra [8]). Recently new approaches have been developed based on generalized fuzzy derivatives discussed in the previous chapter. In the present work we review with the interpretations based on Hukuhara differentiability, Zadeh's extension principle and the strongly generalized differentiability concepts. Differentiability in the sense of Hukuhara is one of the first approaches to define the concept of solution to a fuzzy differential equation and to study the existence of such solutions. Then we attempt to drive some new result among previous work.

2 Preliminaries

In this section, we present some notations, definitions and preliminary that will be useful for our main results. This materials can be found in the literatures [1, 9, 10, 11].
Consider the space R_F of fuzzy intervals, that is the class of elements $u : R \to [0, 1]$ satisfying that

*Corresponding Author

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

(i) u is normal,i.e.,there exists $s_0 \in R$ such that$u(s_0) = 1$.

(ii) u is upper semicontinuous on R.

(iii) u is fuzzy-convex, that is, $u(tx + (1 - t)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$, $\forall t \in [0, 1]$ and $x, y \in R$.

(iv) $cl\{s \in R \mid u(s) > 0\}$ is compact, where cl denotes the closure of a subset.

Let us denote by R_F the space of fuzzy numbers. For $0 < r \leq 1$, we denote $u_r = \{x \in R; u(x) \geq r\}$ and $u_0 = cl\{x \in R; u(x) > 0\}$. Then u_r will be called the r-level set of the fuzzy number u. The 1-level set is called the core of the fuzzy number, while the 0-level set is called the support of the fuzzy number. We represent $[u]^\alpha = [u_{\alpha_l}, u_{\alpha_r}]$, so that $diam([u]^\alpha) = u_{\alpha_r} - u_{\alpha_l}$. The functions $\overline{u}$ and $\underline{u}$ given by $\overline{u}(\alpha) = u_{\alpha_r}$ and $\underline{u}(\alpha) = u_{\alpha_l}$ represent the lower and upper branches of u, respectively. For the study of equation $y\prime(t) = a(t)y(t) + b(t)$ in R_F.

2.1 Definitions and theorems

Given $x, y \in R_F$, if there exists $z \in R_F$ with $x = y + z$, we say that z is the H-differenceof $xandy$, denoted by $x \ominus y$. Let $f : (a, b) \to I$ and $t_0 \in (a, b)$. We say that f is strongly generalized (Hukuhara) differentiable at t_0, if there exists an element $F'(t_0) \in I$ such that, for all $h > 0$ sufficiently small,

$(i)\exists\, F(t_0) \ominus F(t_0 - h), F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$ *and*
$$\lim_{h\to0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0) \ or,$$

$(ii)\exists\, F(t_0) \ominus F(t_0 + h), F(t_0 - h) \ominus F(t_0)$ *and*
$$\lim_{h\to0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 + h)}{-h} = lim_{h\to0^+} \frac{F(t_0 - h) \ominus F(t_0)}{-h} = F'(t_0) \ or,$$

$(iii)\exists\, F(t_0) \ominus F(t_0 + h), F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ *and*
$$\lim_{h\to0^+} \frac{(F(t_0) \ominus F(t_0 + h)}{-h} = \lim_{h\to0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0) \ or,$$

$(iv)\exists\, F(t_0) \ominus F(t_0 + h), F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ *and*
$$\lim_{h\to0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 + h)}{-h} = \lim_{h\to0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0).$$

As stated in [9], case (i) corresponds to the H-derivative (see [1]). A function that is strongly generalized differentiable as in cases (i) and (ii), will be referred as (i)-differentiable or (ii)-differentiable, respectively. For cases (iii) and (iv), it is known (see [11]) that a function may be (iii) or (iv)-differentiable only at a discrete set of points, consisting exactly of the points where differentiability switches between cases (i) and (ii).
In this here we consider the fuzzy initial value problem $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0 \in R_F$ under Hukuhara differentiability. The function $f : R \times R_F \longrightarrow R_F$ is assumed to be continuous. The following lemma transforms the fuzzy differential equation into integral equations. In the present the differentiability concept is that of Hukuhara differentiability. A fuzzy differential equation is written using the Hukuhara derivative. For $t_0 \in R$, the fuzzy differential equation $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0 \in R_F$is continuous, is equivalent to the integral equation $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))$, on some interval $[t_0, t_1] \subset R$. Given two fuzzy numbers $u, v \in R_F$, the generalized Hukuhara difference (gH-difference for short) is the fuzzy number w, if it exists such that,

$$u \ominus gHv = w \Longleftrightarrow \ (i)u = v + w \ or \ (ii)v = u - w.$$

We say that a point $x_0 \in (a, b)$ is an l-critical point of f if it is a critical point for the length function $len(f(x)) = f^+(x) - f^-(x)$. Let $f : [a, b] \to I$ be gH-differentiable at $x_0 \in (a, b)$. We say that f is (i)-gH-differentiable at x_0 if
(i)$f'(x_0) = [(f^-)'(x_0), (f^+)'(x_0)]$
and that f is (ii)-gH-differentiable at x_0 if (ii)

$f'(x_0) = [(f^+)'(x_0), (f^-)'(x_0)]$. If $u \in R_F$ is a fuzzy number and u_r are its level-sets then,

(*i*) u_r is a closed interval $u_r = [u_{r^-}, u_{r^+}]$ for any $r\varepsilon[0,1]$.

(*ii*) If $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$, then $u_{r_2} \subseteq u_{r_1}$.

(*iii*) For any sequence r_n which converges from below to $r \in (0,1]$ we have $\bigcap_{n=1}^{\infty} u_{r_n} = u_r$.

(*iv*) For any sequence r_n which converges from above to 0 we have $cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} u_{r_n}) = u_r$.

Let $F : [a,b] \longrightarrow \mathbf{F}$ be differentiable and denote $[F(t)]^\alpha = [q_\alpha(t), r_\alpha(t)]$. Then the boundary functions q_α and r_α are differentiable,$[F'(t)]^\alpha = [q'_\alpha(t), r'_\alpha(t)]$ *and* $q'_\alpha(t) \leq r'_\alpha(t)$. This gives us a procedure to solve the fuzzy differential equation $x'(t) = f(t, x(t)), x(0) = x_0$. Denote, $[x(t)]^\alpha = x_\alpha(t) = [u_\alpha(t), v_\alpha(t)], [x_0]^\alpha = [u^0_\alpha, v^0_\alpha]$ and $[f(t, x(t))]^\alpha = [f_\alpha(t, u_\alpha(t), v_\alpha(t)), g_\alpha(t, u_\alpha(t), v_\alpha(t))]$ and proceed as follows:

(*i*) Solve the differential system $u'(t) = f_\alpha(t, u_\alpha(t), v_\alpha(t)), u_\alpha(0) = u^0_\alpha$, $v'(t) = g_\alpha(t, u_\alpha(t), v_\alpha(t)), v_\alpha(0) = v^0_\alpha$ foru_α *and* v_α.

(*ii*) Ensure that and $[u_\alpha(t), v_\alpha(t)]$ *and* $[u^0_\alpha(t), v^0_\alpha(t)]$are valid level sets.

(*iii*) Using the Stacking Theorem, pile up the levels $[u_\alpha(t), v_\alpha(t)]$ to a fuzzy solution $x(t)$.

References

[1] M.L. Puri, D.A. Ralescu, Differentials of fuzzy functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications 91 (1983) 552–558.

[2] Wu, C., Song, S., Stanley Lee, E.: Approximate solutions, existence and uniqueness of the Cauchy problem of fuzzy differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 202, 629-644 (1996).

[3] Kaleva, O.: Fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems 24, 301-317 (1987).

[4] RodrJLguez-Lopez, R.: Comparison results for fuzzy differential equations.Information Sciences 178, 1756-1779 (2008).

[5] Ding, Z., Ma, M., Kandel, A.: Existence of the solutions of fuzzy differential equations with parameters. Information Sciences 99, 205-217 (1997).

[6] Buckley, J.J., Feuring, T.: Fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems 110, 43-54 (2000).

[7] Diamond, P.: Stability and periodicity in fuzzy differential equations. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8, 583–590 (2000).

[8] Lakshmikantham, V., Mohapatra, R.N.: Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions. CRC Press (2003).

[9] B. Bede, I.J.Rudas, A.L. Bencsik, First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability, Information Sciences 177 (2007) 1648–1662.

[10] L. Stefanini, B. Bede, Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, Nonlinear Analysis: Theory,Methods and Applications 71 (2009) 1311–1328.

[11] B. Bede, S.G. Gal, Almost periodic fuzzy-number-valued functions, Fuzzy Sets and Systems 147 (2004) 385–403.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

بررسی جهت و پایداری انشعاب هاف یک سیستم شکار و شکارچی از رده کلموگروف با تاخیر در گونه شکار

مرتضی شریفی *، دانشجوي كارشناسي ارشد، دانشگاه بیرجند، morteza.sharifi۱۴@birjand.ac.ir

امید ربیعی مطلق ، عضو هیأت علمي گروه رياضی، دانشگاه بیرجند، orabieimotlagh@birjand.ac.ir

حاجی محمد محمدی‌نژاد ، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه بیرجند، hmohammadin@birjand.ac.ir

چکیده: در این مقاله یک سیستم از دستگاه‌های شکار و شکارچی از رده دستگاه‌های کلموگروف را در نظر می‌گیریم که در شبیه سازی رقابت دوگونه زیستی در هرم زنجیره غذایی کاربرد دارد. ضمن توسعه فرم نرمال روی منیفلد مرکز این سیستم شکار و شکارچی تاخیری، می‌توان پایداری و جهت انشعاب هاف این سیستم را مشخص کرد.

کلمات کلیدی: معادلات تاخیری، مدل شکار و شکارچی، فرم نرمال، منیفلد مرکزی، انشعاب هاف

۱ مقدمه

عمل متقابل شکار و شکارچی یک ساختار اساسی در پویایی جمعیت است. فهم پویایی مدل‌های شکار و شکارچی برای مطالعه عمل‌های متقابل گونه‌های چندگانه مفید است. مدل شکار و شکارچی تاخیری ابتدا به وسیله ولترا [۲] در سال ۱۹۲۶ پیشنهاد شد که جمعیت ماهی‌ها را مورد مطالعه قرار داد. یک رده مهم از مدل‌های شکار و شکارچی سیستم‌های شکار و شکارچی نوع کلموگروف است که در مدل سازی رقابت دو گونه زیستی در هرم زنجیره غذایی کاربرد دارد. در این مقاله ما به بررسی پایداری و جهت انشعاب هاف برای دستگاه زیر می‌پردازیم :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)\big[r_1 - a_{11}\underbrace{x(t-\tau)}_{=x_t(\tau)} - a_{12}\,y(t)\big], \qquad (۱)\\ \dot{y}(t) &= y(t)\big[-r_2 + a_{21}\,x(t) - a_{22}\,y(t)\big].\end{aligned}$$

دستگاه بالا یک سیستم شکار و شکارچی نوع کلموگروف است که پیش‌تر از جنبه‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است. ما در اینجا به بررسی دوباره این مدل با رویکرد مطالعه پایداری و جهت انشعاب هاف می‌پردازیم. با توجه به [۱] این سیستم دارای چهار نقطه تکین $E_1 = (0,0)$، $E_2 = (0, -\frac{r_2}{a_{22}})$، $E_3 = (\frac{r_1}{a_{11}}, 0)$ و $E_* = (x_*, y_*)$ که در آن :

$$x_* = \frac{r_1 a_{22} + r_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}} \quad , \quad y_* = \frac{r_1 a_{21} - r_2 a_{11}}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}},$$

و اگر شرط

$$(H) : r_1 a_{21} - r_2 a_{11} > 0 \qquad (۲)$$

برقرار باشد در این صورت E_* یک نقطه تکین مثبت منحصر به فرد خواهد بود.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

۲ توسعه فرم نرمال روی منیفلد مرکز

در این بخش فرمول‌های روشنی را با استفاده از قضیه فرم نرمال و منیفلد مرکزی خواهیم یافت که جهت، پایداری و دوره جواب های تناوبی منشعب شده از نقطه تکین E_* در مقدار بحرانی τ را مشخص می‌کند. با توجه به [۱] هر یک از مقادیر بحرانی $\tau = \tau_j^+$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ به وسیله $\tilde{\tau}$ ، در معادله (۲.۳) [۱] یک جفت ریشه موهومی محض $\pm i\omega$ دارد و سیستم (۱) در نقطه تکین E_* یک انشعاب هاف پیدا می‌کند.

فرض کنید $u_1(t) = x(\tau t) - x_*$ ، $u_2(t) = y(\tau t) - y_*$ و $\tau = \tilde{\tau} + \mu$، که $\mu \in R$، بنابراین یک مقدار انشعاب هاف از سیستم (۱) است و سیستم (۱) به صورت زیر اصلاح می‌شود :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \tau(u_1(t) + x_*)[-a_{11}u_1(t-1) - a_{12}u_2(t)], \\ \dot{u}_2 = \tau(u_2(t) + y_*)[a_{21}u_1(t) - a_{22}u_2(t)]. \end{cases} \quad (۳)$$

اکنون برای هر $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ قرار می‌دهیم :

$$l_\mu \phi = (\tilde{\tau} + \mu) \begin{pmatrix} -a_{11}x_*\phi_1(-1) - a_{12}x_*\phi_2(0) \\ a_{21}y_*\phi_1(0) - a_{22}\phi_2(0) \end{pmatrix} \quad (۴)$$

و

$$f(\mu, \phi) = (\tilde{\tau} + \mu) \begin{pmatrix} -a_{11}\phi_1(0)\phi_1(-1) - a_{12}\phi_1(0)\phi_2(0) \\ a_{21}\phi_2(0) - a_{22}\phi_2^2(0) \end{pmatrix}. \quad (۵)$$

برای $\phi \in C^1([-1, 0], R^2)$ ، تعریف می‌کنیم :

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta} & \theta \in [-1, 0), \\ \int_{-1}^{0} d\eta(\mu, s)\phi(s) & \theta = 0, \end{cases} \quad (۶)$$

و

$$R(\mu) = \begin{cases} 0 & \theta \in [-1, 0), \\ f(\mu, \phi) & \theta = 0. \end{cases} \quad (۷)$$

بنابراین سیستم (۵) هم ارز است با :

$$\dot{u}(t) = A(\mu)u_t + R(\mu)u_t. \quad (۸)$$

در ادامه تعریف می‌کنیم :

$$A^*\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in [0, 1], \\ \int_{-1}^{0} d\eta(t, 0)\psi(-t), & s = 0, \end{cases} \quad (۹)$$

و ضرب داخلی

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^{0}\int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta)d\eta(\theta)\phi(\xi)d\xi \quad (۱۰)$$

که $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$. با توجه به [۱] $\pm i\tilde{\tau}\omega$ مقادیر ویژه $A(0)$ هستند بنابراین مقادیر ویژه A^* نیز خواهند بود. اکنون فرض کنید که $q(\theta)$ بردار ویژه متناظر با $i\omega\tilde{\tau}$ از $A(0)$ باشد و $q^*(s)$ بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $-i\omega\tilde{\tau}$ از A^* باشد. بنابراین $q(\theta)$ و $q^*(s)$ را می‌توانیم طوری بدست آوریم که داشته باشیم $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ ، بنابراین به آسانی داریم که :

$$q(\theta) = \left(1, -\frac{i\omega + a_{11}x_*e^{i\omega\tilde{\tau}}}{a_{12}x_*}\right)^T e^{i\omega\tilde{\tau}\theta} \quad (۱۱)$$

و

$$q^*(s) = B\left(-\frac{a_{22}y_* - i\omega}{a_{12}x_*}, 1\right) e^{i\omega\tilde{\tau}s}, \quad (۱۲)$$

که در آن

$$B = \left\{\frac{(a_{22}y_* - i\omega)a_{11}x_*\tilde{\tau}e^{i\omega\tilde{\tau}} - a_{11}x_*e^{i\omega\tilde{\tau}} - a_{22}y_*}{a_{21}x_*}\right\}^{-1}. \quad (۱۳)$$

برا محاسبه مختصات منیفلد مرکزی C_0 را در $\mu = 0$، فرض کنیم u_t جواب معادله (۵) در $\mu = 0$ باشد در این صورت تعریف می‌کنیم :

$$z(t) = \langle q^*, u_t \rangle \,,\; W(t, \theta) = u_t(\theta) - 2Re\{z(t)q(\theta)\}. \quad (۱۴)$$

روی منیفلد مرکز C_0 داریم :

$$\begin{aligned} &W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta) \\ &W_{20}(\theta)\tfrac{z^2}{2} + W_{11}(\theta)z\bar{z} + W_{02}(\theta) \\ &\tfrac{\bar{z}^2}{2} + W_{30}(\theta)\tfrac{z^3}{6} + \cdots \end{aligned}$$

در این مقاله فقط جواب‌های حقیقی را بررسی خواهیم کرد. برای جواب $u_t \in C_0$ از (۵) زمانی که $\mu = 0$،

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= i\omega\tilde{\tau}z + \bar{q}^*(\theta)f(0, W(z, \bar{z}, \theta) + 2Re\{zq(\theta)\}) \\ &= i\omega\tilde{\tau}z + \bar{q}^*(0)f_0. \end{aligned} \quad (۱۵)$$

که می‌توان نوشت :

$$\dot{z}(t) = i\omega\tilde{\tau}z + g(z, \bar{z}) \quad (۱۶)$$

که در آن :

$$g(z,\bar z)=g_{20}\frac{z^2}{2}+g_{11}z\bar z+g_{02}\frac{\bar z^2}{2}+g_{21}\frac{z^2\bar z}{2}+\cdots .$$

(۱۷)

برای ساده سازی نمادها، قرار می‌دهیم :

$$M=-\frac{i\omega+a_{11}x_*e^{i\omega\tilde\tau}}{a_{12}x_*},\qquad N=-\frac{a_{22}y_*-i\omega}{a_{12}x_*}.$$

(۱۸)

بنابراین از (۱۴) نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned}u_t(\theta)&=W(t,\theta)+2Re\{z(t)q(\theta)\}\\&=W_{20}(\theta)\tfrac{z^2}{2}+W_{11}(\theta)z\bar z+W_{02}(\theta)\tfrac{\bar z^2}{2}\\&+(1,M)^Te^{i\omega\tilde\tau\theta}z+(1,\bar M)^Te^{-i\omega\tilde\tau\theta}\bar z+\cdots .\end{aligned}$$

(۱۹)

حال با استفاده از (۴) و روابط اخیر داریم :

$$g(z,\bar z)=\bar q^*(0)f_0(z,\bar z)=\bar q^*(0)f(0,u_t). \qquad (۲۰)$$

حال با محاسبه $f(0,u_t)$، $\bar q^*(0)$ و مقایسه ضرایب می‌توان نوشت :

$$g_{20}=-2\overline{BN}\tilde\tau(a_{11}e^{-i\omega\tilde\tau}+a_{21}M)+2\overline{BM}\tilde\tau(a_{21}-a_{22}M),$$

$$\begin{aligned}g_{11}&=-2\overline{BN}\tilde\tau(a_{11}Re\{e^{i\omega\tilde\tau}\}+a_{12}Re\{M\})\\&+2\bar B\tilde\tau(a_{21}Re\{M\}-a_{22}|M|^2),\end{aligned}$$

$$g_{02}=-2\overline{BN}\tilde\tau(a_{11}e^{i\omega\tilde\tau}+a_{12}\bar M)+2\overline{BM}\tilde\tau(a_{21}-a_{22}\bar M),$$

$$\begin{aligned}g_{21}&=-2\overline{BN}\tilde\tau[a_{11}(W_{20}^{(1)}(0)e^{i\omega\tilde\tau}+2W_{11}^{(1)}(0)e^{-i\omega\tilde\tau}\\&+W_{20}^{(1)}(-1)+2W_{11}^{(1)}(-1))+a_{12}(W_{20}^{(1)}(0)\bar M\\&+2W_{11}^{(1)}(0)M+W_{20}^{(2)}(0)+2W_{11}^{(2)}(0))]\\&+\bar B\tilde\tau[a_{21}(W_{20}^{(2)}(0)+2W_{11}^{(2)}(0)+\bar MW_{20}^{(1)}(0)\\&+2MW_{11}^{(1)}(0))-2a_{22}(\bar MW_{20}^{(2)}(0)+2MW_{11}^{(2)}(0))].\end{aligned}$$

در ادامه تلاش می‌کنیم $W_{20}(\theta)$ و $W_{11}(\theta)$ را محاسبه کنیم. از (۱۴) و (۸) داریم:

$$\dot W=\dot u_t-\dot z q-\dot{\bar z}\bar q=$$

$$\begin{cases}AW-2Re\{\bar q^*(0)f_0q(\theta), & \theta\in[-1,0),\\ AW-2Re\{\bar q^*(0)f_0q(\theta)+f_0, & \theta=0\end{cases}$$

$$=AW+H(z,\bar z,\theta),$$

(۲۱)

که در آن

$$H(z,\bar z,\theta)=H_{20}\frac{z^2}{2}+H_{11}z\bar z+H_{02}\frac{\bar z^2}{2}+H_{21}\frac{z^2\bar z}{2}+\cdots .$$

(۲۲)

حال با محاسبه $H_{20}(\theta)$ و $H_{11}(\theta)$ به صورت زیر :

$$\begin{aligned}H_{20}(\theta)&=-g_{20}q(\theta)-\bar g_{02}\bar q(\theta)\\H_{11}(\theta)&=-g_{11}q(\theta)-\bar g_{11}\bar q(\theta).\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

خواهیم داشت :

$$W_{20}(\theta)=\frac{ig_{20}}{\omega\tilde\tau}q(0)e^{i\omega\tilde\tau\theta}+\frac{i\bar g_{02}}{3\omega\tilde\tau}\bar q(0)e^{-i\omega\tilde\tau\theta}+E_1e^{2i\omega\tilde\tau\theta}.$$

(۲۴)

و

$$W_{11}(\theta)=-\frac{ig_{11}}{\omega\tilde\tau}q(\theta)e^{i\omega\tilde\tau\theta}+\frac{i\bar g_{11}}{\omega\tilde\tau}\bar q(0)e^{i\omega\tilde\tau\theta}+E_2.$$

(۲۵)

اکنون تلاش می‌کنیم E_1 و E_2 را محاسبه کنیم. با توجه به رابطه (۲۱) و تعریف A معادلات ماتریسی زیر بدست می‌آیند که می‌توان از آن E_1 و E_2 را بدست آورد.

$$\begin{pmatrix}2\omega i+a_{11}x_*e^{-2i\omega\tilde\tau} & a_{12}x_*\\ -a_{21}y_* & 2\omega i+a_{22}y_*\end{pmatrix}\times E_1=\begin{pmatrix}-2a_{11}e^{-i\omega\tilde\tau}-2a_{12}M\\ 2Ma_{21}-2M^2a_{22}\end{pmatrix}, \qquad (۲۶)$$

و

$$\begin{pmatrix}a_{11}x_* & a_{12}x_*\\ -a_{21}y_* & a_{22}y_*\end{pmatrix}E_2=\begin{pmatrix}-2a_{11}Re\{e^{i\omega\tilde\tau}\}-2a_{12}Re\{M\}\\ 2a_{21}Re\{M\}-2a_{22}|M|^2\end{pmatrix}. \qquad (۲۷)$$

در این صورت به‌راحتی می‌توانیم فرم نرمال را روی منیفلد مرکز با محاسبه مقادیر زیر توسعه دهیم:

$$\begin{aligned}c_1(0)&=\tfrac{i}{2\omega\tilde\tau}\left(g_{11}g_{20}-2|g_{11}|^2-\tfrac{|g_{02}|^2}{3}\right)+\tfrac{g_{21}}{2},\\ \mu_2&=-\tfrac{Re(c_1(0))}{Re(\acute\lambda_0(\tilde\tau))},\\ \beta_2&=2Re(c_1(0)),\\ T_2&=-\tfrac{Im(c_1(0))+\mu_2Im(\acute\lambda_0(\tilde\tau))}{\omega}.\end{aligned}$$

(۲۸)

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

که مشخص می‌کند چگونگی جواب‌های تناوبی که در مقدار تناوبی $\tilde{\tau}$ منشعب می‌شود. به این معنی که، μ_2 جهت انشعاب هاف را مشخص می‌کند. حال اگر $\mu_2>0$ ($\mu_2<0$)، آنگاه انشعاب هاف فرا بحرانی (زیر بحرانی) و جواب‌های تناوبی منشعب شده برای $\tau>\tilde{\tau}$ ($\tau<\tilde{\tau}$) وجود دارند. β_2 پایداری جواب‌های تناوبی را مشخص می‌کند. جواب‌های تناوبی منشعب شده روی منیفلد مرکزی اگر $\beta_2<0$ ($\beta_2>0$) پایدار (ناپایدار) هستند. T_2 دوره تناوب جواب‌های تناوبی که منشعب می‌شوند را مشخص می‌کند به این صورت که اگر $T_2>0$ ($T_2<0$) دوره تناوب افزایش (کاهش) می‌یابد.

۳ جهت و پایداری انشعاب هاف

قضیه ۱.۳. [۱] *فرض کنید که شرط H و یا $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$ یا شرط Q در قضیه (۲.۲) [۱]برقرار باشد. آنگاه انشعاب هاف سیستم (۱) در نقطه E_* و $\tau=\tau_j^+$ فرابحرانی (به ترتیب زیر بحرانی) است اگر $Re(c_1(0))<0$ (به ترتیب $Re(c_1(0))>0$). به هر حال جهت انشعاب هاف سیستم (۱) در E_* و $\tau=\tau_j^-$، $\tau<\tau_j^+$ (به ترتیب $\tau>\tau_j^-$) است اگر $Re(c_1(0))<0$ (به ترتیب $Re(c_1(0))>0$) باشد.*

قضیه ۲.۳. [۱] *اگر شرط (H) برقرار باشد و یا $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$ و $\tau=\tau_0^+$ یا شرط Q در قضیه (۲.۲) [۱] برقرار باشد، $\tau=\tau_j^+$ $(j=0,1,2,\cdots,k)$ و $\tau=\tau_j^-$ $(j=0,1,2,\cdots,k-1)$، آنگاه جواب تناوبی منشعب شده پایدار است اگر $Re(c_1(0))<0$ و اگر $Re(c_1(0))>0$ ناپایدار است.*

۴ شبیه سازی عددی

سیستم زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)\big[1-x(t-\tau)-0.5\,y(t)\big],\\ \dot{y}(t) &= y(t)\big[-1+2\,x(t)-4\,y(t)\big].\end{aligned}$$

این سیستم یک نقطه تکین مثبت $E_*=(0.9,0.2)$ دارد و در شرط $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$ صدق می‌کند. با توجه به فرمول‌های بدست امده در قسمت (۲)، داریم که :

$$\tau_0^+ \doteq 1.65893, \qquad Rec_1(0) \doteq -67.0121$$

که با توجه به (۲۸) نتیجه می‌شود که $\mu_2>0$ و $\beta_2<0$ است. بنابراین E_* زمانی که $\tau<\tau_0^+$ پایدار است. زمانی که τ می‌گذرد از مقدار بحرانی τ_0^+، پایداری E_* کاهش یافته و یک انشعاب هاف رخ می‌دهد. به این معنی که، یک خانواده از جواب‌های تناوبی از E_* منشعب می‌شوند. زمانی که $\mu_2>0$ و $\beta_2<0$، جهت انشعاب هاف $\tau>\tau_0^+$ است و این جواب‌های تناوبی منشعب شده از E_* در τ_0^+ پایدار هستند.

مراجع

References

[1] Yongli Song, Junjie Wei, "Local Hopf bifurcation and global periodic solutions in a delayed predator–prey system," J. Math. Anal. Appl. 301 (2005) 1–21.

[2] V. Volterra, "Variazionie fluttuazioni del numbero d'individui in specie animali conviventi," Mem. Acad. Lincei. 2 (1926), 31-113.

Books:

[3] Balakumar Balachandran, Tamás Kalmár-Nagy, David E. Gilsinn, "Delay Differential Equations," National Institute of Standards and Technology, 100 Bureau Drive, Stop 8910, Gaithersburg, MD 20899-8910, USA.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

Existence results for nonlinear fractional differential equations

Fateme Motevali *and Azizollah Babakhani** , Faculty of Basic Science, Department of Mathematics,
Babol University of Technology, Babol-Iran, fatima_motevali@yahoo.com

Abstract: In this manuscript, we try to drive some new resuls on the existence of solutions for a class of boundary value problem of fractional differential equations involving the Caputo fractional derivative of order $\alpha \in (1, 2]$ although we use some sufficient conditions which stublished by researchers.
Keywords: Boundary value problem; Fractional derivative and fractional integral; Fixed point; Integral conditions.

1 INTRODUCTION

this article is concerned with the existence and uniqueness of solutions for boundary value problems with fractional order differential equations and non-linear integral conditions of the form

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J = (0,\ T), \alpha \in (1,\ 2] \tag{1}$$

$$y(0) - y'(0) = \int_0^T g(s,\ y)ds, \tag{2}$$

$$y(T) + y'(T) = \int_0^T h(s,\ y)ds, \tag{3}$$

where $^{c}D^{\alpha}$ is the Caputo fractional derivative, and f, g and $h : J \times R \longrightarrow R$ are given continuous functions.

Some notations, definitions and preliminary facts that are used throughout this article. By $C(J, R)$, we denote the Banach space of all continuous functions from J to R with the norm $\| y \|_{\infty} := \sup\{|y(t)| : t \in J\}$. We let $L^1(J, R)$ denote the Banach space of functions $y : J \longrightarrow R$ that are Lebesgue integrable with norm $\| y \|_{L^1} = \int_0^T |y(t)|dt$and let $C^2(J, R)$ be the space of differentiable functions $y : J \longrightarrow R$ whose second derivative y'' is continuous.

*Corresponding Author

1.1 Definitions and theorems

Definition 1.1. *[1, 2] The fractional (arbitrary) order integral of the function $h \in L^1([a, b], \mathbb{R}_+)$ of order $\alpha \in \mathbb{R}_+$ is defined by*

$$I_a^{\alpha}h(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\, ds, \tag{4}$$

where Γ is the gamma function. When $a = 0$, we write $I^{\alpha}h(t) = h(t) * \varphi_{\alpha}(t)$, where $\varphi_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ for $t > 0$, $\varphi_{\alpha}(t) = 0$ for $t \leq 0$ and $\varphi_{\alpha} \longrightarrow \delta(t)$ as $\alpha \longrightarrow 0$, where δ is the delta function.

Definition 1.2. *[1, 2] For a function h given on the interval $[a, b]$, the α-th Riemann-Liouville fractional-order derivative of h, is defined by*

$$(D_{a+}^{\alpha}h)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dt})^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}h(s)ds. \tag{5}$$

Here $n = [\alpha] + 1$ and $[\alpha]$ denotes the integer part of α.

Definition 1.3. *[3] For a function h given on the interval $[a, b]$, the Caputo franctional-order derivative of h, is defined by*

$$({}^{c}D^{\alpha}_{a+}h)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h^{(n)}(s) ds \tag{6}$$

Here $n = [\alpha] + 1$.

Definition 1.4. *A function $y \in C^2(J, R)$ whose α-derivative exists on J is said to be a solution of (1.1)-(1.3) if y satisfies the equation ${}^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t))$ on J and the conditions (1.2) and (1.3).*

In the following some results introduce such that we claim that to generalize this concepts to other case [4].

Theorem 1.5. *Assume that:*
(H1) There exists a constant $k > 0$ such that
$\mid f(t, u) - f(t, \tilde{u}) \mid \leq k \mid u - \tilde{u} \mid,$
for each $t \in J$ and all $u, \tilde{u} \in R$.
(H2) There exists a constant $k^* > 0$ such that
$\mid g(t, u) - g(t, \tilde{u}) \mid \leq k^* \mid u - \tilde{u} \mid,$
for each $t \in J$ and all $u, \tilde{u} \in R$.
(H3) There exists a constant $k^{**} > 0$ such that
$\mid h(t, u) - h(t, \tilde{u}) \mid \leq k^{**} \mid u - \tilde{u} \mid,$
for each $t \in J$ and all $u, \tilde{u} \in R$.
If
$[\frac{T(T+1)}{T+2}k^* + \frac{T(T+1)}{T+2}k^{**} + TkG^*] < 1$
then the BVP (1.1)-(1.3) has a unique solution on J.

Theorem 1.6. *Assume that:*
(H4) The function $f : J \times R \longrightarrow R$ is continuous.
(H5) There exists a constant $M > 0$ such that

$$\mid f(t, u) \mid \leq M, \ for \text{ each } t \in J \text{ and all } u \in R.$$

(H6)) There exists a constant $M_1 > 0$ such that

$$\mid g(t, u) \mid \leq M_1, \ for \text{ each } t \in J \text{ and all } u \in R.$$

(H7) There exists a constant $M_2 > 0$ such that

$$\mid h(t, u) \mid \leq M_2, \ for \text{ each } t \in J \text{ and all } u \in R.$$

Then the BVP (1.1)-(1.3) has at least one solution on J.

2 Reference

References

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B.V., Amesterdam, 2006.

[2] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.

[3] A.A. Kilbas and S.A. Marzan, Nonlinear Differential Equations with the Caputo Fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, Differ. Equ. 41 (2005), pp. 84-89.

[4] Mouffak Benchohra, John R, Existence results for boundary value problems with non-linear fractional differential equation, 2008.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

The regularized Schrödinger equation in view of Airy function

F. Fathi*, M. Sc. student of School of Mathematics,

Shahrekord University, f.fathi2368@yahoo.com

A. Ansari†, Academic member of School of Mathematics,

Shahrekord University, alireza _ 1038@yahoo.com

Abstract: In this paper, we introduce the Schrödinger kernel with respect to Airy function. Also, we study differential properties of the regularized kernel and a solution for the regularized Schrödinger equation.

Keywords: Kontorovich-Lebedev transform, Schrödinger equation, Airy function, Macdonald function, Dirac delta function.

1 INTRODUCTION

The Kontorovich-Lebedev transform is given by the following formula [?]

$$K_{i\tau}[f] = \int_0^\infty k_{i\tau}(x) f(x) dx, \qquad (1)$$

where integral (??) converges with respect to the norm in $L_2(R, \tau \sinh(\pi\tau) d\tau)$, which is a weighted space with the norm

$$||f||_{L_2(R,\tau\sinh(\pi\tau)d\tau)} = (\int_R |f(\tau)|^2 \tau \sinh(\pi\tau) d\tau)^{\frac{1}{2}}.$$

Moreover, it has an inversion formula

$$f(x) = \frac{2}{x\pi^2} \int_0^\infty \tau \sinh(\pi\tau) k_{i\tau}(x) K_{i\tau}[f] d\tau, \qquad (2)$$

where integral (??) converges with respect to the norm in $L_2(R_+, xdx)$, which is a weighted space with the norm

$$||f||_{L_2(R_+,xdx)} = (\int_{R_+} |f(\tau)|^2 x dx)^{\frac{1}{2}}.$$

The kernel $k_{i\tau}(x)$ is the Macdonald function

$$k_{i\tau}(x) = \int_0^\infty e^{-x\cosh t} \cos(\tau t) dt,$$

and satisfy the following differential equations

$$\mathcal{A}_x k_{i\tau}(x) = \tau^2 k_{i\tau}(x), \qquad (3)$$

$$\mathcal{A}_x = x^2 - x\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}. \qquad (4)$$

Also, the Airy function is given by following formula [?]

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i(\frac{z^3}{3}+xz)} \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(\frac{z^3}{3} + xz) dz, \qquad (6)$$

which is a solution of the differential equation

$$y'' - xy = 0. \qquad (7)$$

It has the following integral representation [?]

$$\int_{-\infty}^\infty Ai(x) e^{-iwx} dx = e^{\frac{iw^3}{3}}. \qquad (8)$$

*Corresponding author
†Corresponding author

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

2 THE REGULARIZED SCHRÖDINGER KERNEL

In this section, we introduced the regularized Schrödinger kernel involving a regularization parameter.

Definition 2.1. *For $t>0$, $(x,y)\in R_+\times R_+$,*

$$h_t^\epsilon(x,y)=\frac{B}{x}\int_0^\infty Ai(tk_\epsilon\tau)\tau\sinh(\pi\tau)k_{i\tau}(x)k_{i\tau}(y)d\tau, \tag{9}$$

is called the regularized Schrödinger kernel in terms of the Airy function and the Kontorovich-Lebedev transform where $k_\epsilon=\frac{\epsilon+i}{\sqrt{\epsilon^2+1}}, \epsilon>0$, and $B=\frac{8}{\sqrt[3]{9}}(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Now, we explain connection between function h_t^ϵ and Schrödinger type equation.

Theorem 2.2. *The function h_t^ϵ is a solution of regularized Schrödinger equations for each fixed $y\in R_+$ and for each fixed $x\in R_+$ $(U=U(x,y,t),\triangle=\partial^2_{xx})$*

$$(-x^2\triangle-(tk_\epsilon^2)^{-1}\partial^2_{tt})U=(3x\partial_x-(x^2-1))U, \tag{10}$$

$$(-y^2\triangle-(tk_\epsilon^2)^{-1}\partial^2_{tt})U=(y\partial_y-y^2)U. \tag{11}$$

Also, we have

$$\lim_{t\to 0}h_t^\epsilon(x,y)=\delta(x-y),$$

where δ is the Dirac delta function.

Proof. First, we prove (??) and (??). By differentiating twice both sides of equation (??) with respect to t, we have

$$\frac{\partial^2 h_t^\epsilon}{\partial t^2}=$$

$$\frac{B}{x}\int_0^\infty t(k_\epsilon\tau)^2Ai(tk_\epsilon\tau)\tau\sinh(\pi\tau)k_{i\tau}(x)k_{i\tau}(y)d\tau.$$

It follows from the (??) that

$$\frac{\partial^2 h_t^\epsilon}{\partial t^2}=$$

$$tk_\epsilon^2\frac{B}{x}\int_0^\infty Ai(tk_\epsilon\tau)\tau\sinh(\pi\tau)[\mathcal{A}_xk_{i\tau}(x)]k(y)d\tau.$$

Hence, we have

$$\frac{\partial^2 h_t^\epsilon}{\partial t^2}=\frac{tk_\epsilon^2}{x}\mathcal{A}_x[xh_t^\epsilon(x,y)]. \tag{12}$$

Similarly, we have

$$\frac{\partial^2 h_t^\epsilon}{\partial t^2}=tk_\epsilon^2\mathcal{A}_y[h_t^\epsilon(x,y)]. \tag{13}$$

Because of

$$\mathcal{A}_x[xU]$$

$$=(x^2-x\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx})(xU)=(x^3-x)U-3x^2U'-x^3U'', \tag{14}$$

if we put (??) in (??), we obtain the equation (??). From

$$\mathcal{A}_y[U]=(y^2-y\frac{d}{dy}y\frac{d}{dy})(U)=y^2U-y\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial^2 U}{\partial y},$$

equation (??) becomes

$$\frac{1}{tk_\epsilon^2}\partial^2_{tt}h_t^\epsilon=yU-y\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

which yields (??). It remains to prove (??). Clearly, for any ϕ from the test function space $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ (consists of the $C^\infty(\mathbb{R}_+)$ functions that have compact support in $\mathbb{R}$) we have

$$\lim_{t\to 0}\langle h_t^\epsilon(x,.),\phi(.)\rangle=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{B}{x}\int_0^\infty Ai(tk_\epsilon\tau)\tau\sinh(\pi\tau)k_{i\tau}(x)K_{i\tau}[\phi]d\tau. \tag{15}$$

Taking into account, relation (2.16.14.1) given in [?] and Parseval equality for the cosine Fourier transform, we have

$$\frac{B}{x}\int_0^\infty Ai(tk_\epsilon\tau)\tau\sinh(\pi\tau)k_{i\tau}(x)K_{i\tau}[\phi]d\tau=$$

$$\sqrt{2\pi}\frac{B}{x}\int_0^\infty Ai(tk_\epsilon\tau)\tau\sinh(\frac{\pi\tau}{2})k_{i\tau}(x)$$

$$\int_0^\infty\cos(\tau u)\mathcal{F}_c[\phi,\sinh u]dud\tau,$$

where $\mathcal{F}_c[\phi,\nu]$ denotes the Fourier transform of $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Hence, by using of differentiation, integration by parts, convolution properties and the Parseval equality for the Fourier transform, we have

$$\sqrt{2\pi}\frac{B}{x}\int_0^\infty Ai(tk_\epsilon\tau)\tau\sinh(\frac{\pi\tau}{2})k_{i\tau}(x)$$

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

$$\int_0^\infty \cos(\tau u)\mathcal{F}_c[\phi,\sinh u]dud\tau$$

$$= \frac{-\sqrt{2\pi}B}{2x}\int_0^\infty Ai(tk_\epsilon\tau)\sinh(\frac{\pi\tau}{2})k_{i\tau}(x)$$

$$\int_0^\infty \sin(\tau u)\frac{\partial}{\partial u}[\mathcal{F}_c[\phi,\sinh u]]dud\tau$$

$$= \frac{-\sqrt{2\pi}B}{4x}\int_{-\infty}^\infty Ai(tk_\epsilon\tau)\sinh(\frac{\pi\tau}{2})k_{i\tau}(x)$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\tau u}\frac{\partial}{\partial u}[\mathcal{F}_c[\phi,\sinh u]]dud\tau. \quad (16)$$

By virtue of (2.5.54.6) in [?], relation (??) and making use of the Fourier inversion theorem, the product $Ai(tk_\epsilon\tau)\sinh(\frac{\pi\tau}{2})k_{i\tau}(x)$ can be represented as the Fourier transform of a convolution

$$Ai(tk_\epsilon\tau)\sinh(\frac{\pi\tau}{2})k_{i\tau}(x) = \frac{i}{2\pi tk_\epsilon}\int_{-\infty}^\infty e^{\dfrac{-iw^3}{3(tk_\epsilon)^3}} e^{i\tau w}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{iy\tau}\int_y^\infty \sin(x\sinh(\nu))d\nu dydw$$

$$= \frac{1}{2\pi tk_\epsilon}\int_{-\infty}^\infty e^{iu\tau}\int_{-\infty}^\infty e^{\dfrac{iw^3}{3(tk_\epsilon)^3}}\sin(x\sinh(u-w))dwdu.$$

Hence, (??) becomes to

$$\frac{B}{x}\int_0^\infty Ai(tk_\epsilon\tau)\tau\sinh(\pi\tau)k_{i\tau}(x)K_{i\tau}[\phi]d\tau$$

$$= \frac{-i\sqrt{2\pi}}{8\pi tk_\epsilon}\frac{B}{x}\int_{-\infty}^\infty \frac{d}{dy}[\mathcal{F}_c[\phi,\sinh y]]$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\dfrac{iw^3}{3(tk_\epsilon)^3}}\sin(x\sinh(y-w))dwdy$$

$$= \frac{i\sqrt{2\pi}B}{8\pi tk_\epsilon x}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}_c[\phi,\sinh y]$$

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(\frac{-w^3}{3(tk_\epsilon)^3})\cos(x\sinh(y-w))\cosh(y-w)dwdy$$

$$= \frac{i\sqrt{2\pi}\sqrt[3]{3}B}{8\pi x}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}_c[\phi,\sinh y]$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-w^3}\cos(x\sinh(y\sqrt[3]{3}tk_\epsilon u))\cosh(y-\sqrt[3]{3}tk_\epsilon u)dudy. \quad (17)$$

The last integral in view of asymptotic properties at infinity of Fourier transform of test function and Lebesgue dominated convergence theorem, becomes to

$$\lim_{t\to 0}\langle h_t^\epsilon(x,.),\phi(.)\rangle = \frac{i\sqrt[3]{3}B}{4\sqrt{2\pi}x}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}_c[\phi,\sinh y]\int_{-\infty}^\infty e^{-u^3}\cos(x\sinh y)\cosh ydudy$$

$$= \frac{i\sqrt[3]{3}}{4\sqrt{2\pi}}B\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^3}du[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^\infty \cos(x\lambda)\mathcal{F}_c[\phi,\lambda]d\lambda]$$

$$= \phi(x),$$

which, completes the proof of theorem. □

Theorem 2.3. *The Kontorovich-Lebedev transform (??) with respect to x of the kernel $h_t^\epsilon(x,y)$ is*

$$K_{i\tau}[h_t^\epsilon] = \int_0^\infty k_{i\tau}(x)h_t^\epsilon(x,y)dx = \frac{B\pi^2}{2}Ai(tk_\epsilon\tau)k_{i\tau}(y), \quad (18)$$

and with respect to y, is

$$K_{i\tau}[\frac{h_t^\epsilon}{y}] = \int_0^\infty k_{i\tau}(y)h_t^\epsilon(x,y)\frac{dy}{y} = \frac{B\pi^2}{2}Ai(tk_\epsilon\tau)\frac{k_{i\tau}(y)}{y}. \quad (19)$$

Proof. By virtue of (??), we have

$$f(x) = \frac{B}{x}\int_0^\infty \tau\sinh(\pi\tau)k_{i\tau}(x)Ai(tk_\epsilon\tau)k_{i\tau}(y)d\tau$$

$$= h_t^\epsilon(x,y),$$

which yields (??), similarly

$$f(x) = \frac{B}{x}\int_0^\infty \tau\sinh(\pi\tau)k_{i\tau}(x)Ai(tk_\epsilon\tau)k_{i\tau}(y)\frac{d\tau}{y} = \frac{h_t^\epsilon}{y}.$$

Hence, the proof of theorem is completed. □

References

[1] S. Yakubovich, N. Vieira, "The use of the Kontorovich-Lebedev transform in an analysis of regularized Schrödinger equation," Integral Transforms and Special Functions. 24(1), pp. 9-22, 2013.

[2] V. S. Varadarajan, "Some problems involving Airy function. Communications on Stochastic Analysis," 6(1), pp. 65-68, 2012.

[3] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, "Integrals and Series," vol 2, Special Function, Gordon and Breach, London, 1986, pp. 358.

[4] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, "Integra and Series," vol 1, Elementary Functions, Gordon and Breach, London, 1986, pp. 479.

[5] I. N. Sneddon, "The Use of Integral Transforms," New York: McGraw-Hill, 1972, pp. 354.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

Existence of three solutions to p-Laplacian impulsive problems with small perturbations and Lipschitz nonlinearity

H. Kazemi*,"M. Sc. student",
Sari Branch,Islamic Azad University ,hasan.kazemi68@gmail.com
M. Khaleghi Moghadam, Academic member of Department of Basic Science, Agricultural and natural resource university,
Sari, Iran, mohsen.khaleghi@rocketmail.com
V. Dadashi, Academic member of School of Mathematics, Sari Branch,Islamic Azad University, v.dadashi@gmail.com

Abstract: In this article we study p-Laplacian impulsive differential equations with Lipschitz nonlinearity order of $p-1$ and Dirichlet boundary conditions depending on two real parameter λ and μ. The study of the problem is based on critical point theorem.
Keywords: impulsive differential equations;Critical point.

1 INTRODUCTION

In this article we consider the nonlinear Dirichlet boundary-value problem

$$\begin{aligned} -(a(t)\phi_p(u'(t)))' + b(t)\phi_p(u(t)) &= \lambda g(t,u(t)) \\ &\quad + h(u(t)), \quad t \in [0,T],\ t \neq t_j \\ u(0) = u(T) &= 0 \\ \Delta(\phi_p(u'(t_j))) &= \phi_p(u'(t_j^+)) - \phi_p(u'(t_j^-)) \\ &= \mu I_j(u(t_j)), \quad j = 1,2,\dots,n \end{aligned} \tag{1}$$

where $1 < p < +\infty$, $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s$, $\lambda \in]0,+\infty[$, $\mu \in]0,+\infty[$, $g : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a Lipschitz continues function of order $p-1$ with Lipschizian constant $L \geq 0$ and $h(0) = 0$, $a, b \in L^\infty([0,T])$ satisfy the conditions $\operatorname{ess\,inf}_{t\in[0,T]} a(t) > 0$, $\operatorname{ess\,inf}_{t\in[0,T]} b(t) > 0$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = T$, and $I_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous for every $j = 1,2,\dots,n$. In [?] the problem (??) has been studied with $p = 2$ and $h = 0$.

In recent years, a great deal of works have been done in the study of the existence of solutions for impulsive differential equations, by which a number of chemotherapy, population dynamics, ecology, industrial robotics.

First, we here recall for the reader's convenience [?, Theorem 2.6] which is our main tool.

theorem 1.1 ([?, Theorem 2.6]). *Let X be a reflexive real Banach space; $\Phi : X \to \mathbb{R}$ be a sequentially weakly lower semicontinuous, coercive and continuously Gâteaux differentiable functional whose Gâteaux derivative admits a continuous inverse on X^*, $\Psi : X \to \mathbb{R}$ be a sequentially weakly upper semicontinuous, continuously Gâteaux differentiable functional whose Gâteaux derivative is*

*Corresponding Author

compact, such that

$$\Phi(0) = \Psi(0) = 0\,.$$

Assume that there exist $r > 0$ and $\bar{x} \in X$, with $r < \Phi(\bar{x})$ such that

(i) $\sup_{\Phi(x)\le r}\Psi(x) < r\Psi(\bar{x})/\Phi(\bar{x})$,

(ii) for each λ in

$$\Lambda_r := \left]\frac{\Phi(\bar{x})}{\Psi(\bar{x})}, \frac{r}{\sup_{\Phi(x)\le r}\Psi(x)}\right[,$$

the functional $\Phi - \lambda\Psi$ is coercive.

Then, for each $\lambda \in \Lambda_r$ the functional $\Phi - \lambda\Psi$ has at least three distinct critical points in X.

It has been shown, for instance, in [?] that the set of all eigenvalues of the following problem

$$(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' + \lambda|u(t)|^{p-2}u(t) = 0, \quad t \in [0,T]$$
$$u(0) = u(t) = 0, \tag{2}$$

is given by the sequence of positive numbers

$$\lambda_i = (p-1)(\frac{i\pi_p}{T})^p, \quad for \quad i = 1,2,\ldots,$$

where $\pi_p = \frac{2\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}$.
We recall the well-known characterization of λ_1 as the best constant in the Poincarѐ inequality

$$\int_0^T |u(t)|^p dt \le \frac{1}{\lambda_1}\int_0^T |u'(t)|^p dt, \forall u \in W_0^{1,p}(0,T). \tag{3}$$

Here and in the sequel, we will denote the Sobolev space $W_0^{1,p}(0,T)$ equipped with the norm

$$\|u\| = \left(\int_0^T a(t)|u'(t)|^p dt + \int_0^T b(t)|u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposition 1.2. *Let $u \in W_0^{1,p}(0,T)$, then*

$$\|u\|^p_{L^p([0,T])} \le M_0\|u\|^p \tag{4}$$

where $M_0 := \max\{\frac{1}{ess\,inf a(t)}; \frac{1}{ess\,inf b(t)}\}$ and

$$\|u\|_\infty \le \left(\frac{T^{p-1}}{a_0}\right)^{\frac{1}{p}}\|u\|, \tag{5}$$

where $a_0 := \min_{t\in[0,T]} a(t)$.

Definition 1.3. A function $u \in W_0^{1,p}(0,T)$ is said to be a weak solution of (**??**) if u satisfies

$$-\int_0^T a(t)\phi_p(u'(t))v'(t)\,dt + \int_0^T b(t)\phi_p(u(t))v(t)dt$$
$$-\lambda\int_0^T g(t,u(t))v(t)dt - \int_0^T h(u(t))v(t)dt +$$
$$\mu\sum_{j=0}^n a(t_j)I_j(u(t_j))v(t_j) = 0, \tag{6}$$

for any $v \in W_0^{1,p}(0,T)$.

Definition 1.4. We say that a function

$$u \in \{u \in W_0^{1,p}(0,T) : \phi_p(u'(t)) \in$$
$$W^{1,\infty}(0,T) \setminus \{t_1,\ldots,t_n\}\}$$

is a classical solution of problem (**??**) if u satisfies the equation in the (**??**) a.e. on $(0,T)\setminus\{t_1,\ldots,t_n\}$, the limits $u'(t_j^+), u'(t_j^-), j = 1,2,\ldots,n$ exists and satisfy the impulsive condition

$$\Delta(\phi_p(u'(t_j)) = \phi_p(u'(t_j^+)) - \phi_p(u'(t_j^-))$$

and the boundary condition $u(0) = u(T) = 0$.

Lemma 1.5. *If $u \in W_0^{1,p}(0,T)$ is a weak solution of (**??**), then u is a classical solution of (**??**).*

Now, we define the functionals $\Phi, \Psi : W_0^{1,p}(0,T) \to \mathbb{R}$ by

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p + \int_0^T H(u(t))dt \tag{7}$$

$$\Psi(u) = \int_0^T G(t,u(t))dt - \frac{\mu}{\lambda}\sum_{j=0}^n a(t_j)\int_0^{u(t_j)} I_j(x)dx, \tag{8}$$

and put

$$E_{\lambda,\mu}(u) := \Phi(u) - \lambda\Psi(u)$$

for each $u \in W_0^{1,p}(0,T)$, where $G(t,\xi) := \int_0^\xi g(t,x)dt$ for each $(t,\xi) \in [0,T]\times\mathbb{R}$, $H(\xi) := -\int_0^\xi h(t)dt$. Using the continuity of f and I_j $(j = 1,2,\ldots,n)$, one has that $\Phi,\Psi \in C^1(W_0^{1,p}(0,T),\mathbb{R})$. we note that the solutions of the problem (**??**) are the corresponding critical points of functional $E_{\lambda,\mu}$.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

2 Main results

Lemma 2.1. *Assume that*

(H1) there exist constants $\alpha_j, \beta_j > 0$ and $\gamma_j \in [0, p-1)$ such that for all $x \in \mathbb{R} j = 1, 2, \dots, n$, $|I_j(x)| \le \alpha_j + \beta_j |x|^{\gamma_j}$.

Then, for any $u \in W_0^{1,p}(0,T)$, one has

$$|\sum_{j=0}^{n} a(t_j) \int_0^{u(t_j)} I_j(x)\, dx| \le$$

$$\sum_{j=0}^{n} a(t_j)\Big(\alpha_j \|u\|_\infty + \frac{\beta_j}{\gamma_j+1}\|u\|_\infty^{\gamma_j+1}\Big).$$

Now, put

$$k := \frac{2(p+1)a_0}{4^{p-1}(p+1)\|a\|_\infty + (\frac{p+2}{4})T^p\|b\|_\infty},$$

$$\tilde{a} := \sum_{j=0}^{n} a(t_j), \Gamma_c := \frac{\alpha}{c^{p-1}} + (\frac{\beta_j}{\gamma_j+1})c^{\gamma_j-(p-1)},$$

also suppose that the Lipschitz constant $L > 0$ of the function h satisfies $LM_0 < \frac{1}{2}$.

theorem 2.2. *Suppose that (H1)is satisfied and g is an L^1-Carathéodory function. Furthermore, assume that there exist two positive constants c, d, with $c < d$, such that*

(A1) $G(t,\xi) \ge 0$ for all $(t,\xi) \in \big([0, \frac{T}{4}] \cup [\frac{3T}{4}, T]\big) \times [0, d]$;

(A2)

$$\frac{\int_0^T \max_{|\xi|\le c} G(t,\xi)\, dt}{c^p(1-M_0L)} < k\frac{\int_{T/4}^{3T/4} G(t,d)\, dt}{16d^p(1+M_0L)};$$

(A3)

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty} \frac{\sup_{t\in[0,T]} G(t,\xi)}{\xi^p} \le$$

$$\frac{(p-1)\pi_p^p}{2T}\frac{\int_0^T \max_{|\xi|\le c} G(t,\xi)\, dt}{c^p}.$$

Then, for every λ in

$$\Lambda := \Big]\frac{16a_0(1+M_0L)}{pkT^{p-1}}\frac{d^p}{\int_{T/4}^{3T/4} G(t,d)\, dt},$$

$$\frac{a_0(1-M_0L)}{pT^{p-1}}\frac{c^p}{\int_0^T \max_{|\xi|\le c} G(t,\xi)\, dt}\Big[,$$

there exists

$$\delta := \frac{1}{pT^{p-1}\tilde{a}} \times \min\Big\{$$

$$\frac{a_0c^p(1-M_0L) - pT^{p-1}\lambda\int_0^T \max_{|\xi|\le c} G(t,\xi)\, dt}{c^P\Gamma_c},$$

$$\frac{pk\lambda T^{p-1}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} G(t,d)dt - 4a_0d^p(1+M_0L)}{4d^p\Gamma_{(d\sqrt[p]{4/k})}}\Big\}$$

such that, for each $\mu \in [0, \delta[$ the problem (??) has at least three distinct classical solutions.

Proof. Fix λ and μ as in the conclusion. Our aim is to apply Theorem **??**. For this end, take $X = W_0^{1,p}(0,T)$ and Φ, Ψ as in (**??**),(**??**). Put $r = \frac{a_0c^p(1-M_0L)}{pT^{p-1}}$.since h is a $(p-1)$-Lipschitz continues function with Lipschizian constant $L \ge 0$ and $h(0) = 0$, by Proposition**??**, we have that

$$\Phi(u) \ge \frac{1-M_0L}{p}||u||^p, \tag{9}$$

From the previous inequality and (**??**), for every $u \in X$ such that $\Phi(u) \le r$, one has $\max_{t\in[0,T]}|u(t)| \le c$ Consequently, from Lemma **??** it follows that

$$\frac{\sup_{\varphi(u)\le r}\Psi(u)}{r} \le \frac{pT^{p-1}}{a_0(1-M_0L)} \times$$

$$\Big[\frac{\int_0^T \max_{|\xi|\le c} G(t,\xi)\, dt}{c^p} + \frac{\mu}{\lambda}\tilde{a}\Gamma_c\Big].$$

Hence, bearing in mind that $\mu < \delta$, one has

$$\frac{\sup_{\varphi(u)\le r}\Psi(u)}{r} < \frac{1}{\lambda}. \tag{10}$$

put

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} \frac{4d}{T}t, & t \in [0, T/4], \\ d, & t \in]T/4, 3T/4], \\ \frac{4d}{T}(T-t), & t \in]3T/4, T]. \end{cases}$$

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۷-۴ شهریور ۱۳۹۳

Clearly $\bar{v} \in X$. Moreover, one has

$$\frac{4^p a_0}{2T^{p-1}} d^p \leq \|\bar{v}\|^p \leq$$
$$\frac{2d^p(4^{p-1}(p+1)\|a\|_\infty + (\frac{p+2}{4})T^p\|b\|_\infty)}{(p+1)T^{p-1}} = \frac{4d^p a_0}{kT^{p-1}}. \tag{11}$$

So, from $c < 2^{\frac{2p-1}{p}} d$ we obtain $r < \Phi(\bar{v})$. We recalling h is Lipschitz continuous and satisfies h(0) = 0, we have from **??** that

$$\Phi(\bar{v}) \leq \left(\frac{1 + M_0 L}{p}\right) \|\bar{v}\|^p \tag{12}$$

Moreover,again from the (**??**) inequality,we have

$$\Phi(\bar{v}) \leq \frac{4d^p a_0(1 + M_0 L)}{pkT^{P-1}} \tag{13}$$

Now, due to Lemma **??** , (A1), (**??**)and Proposition**??**, one has

$$\Psi(\bar{v}) \geq$$
$$\int_{T/4}^{3T/4} G(t,d)\, dt - \frac{\mu}{\lambda}\tilde{a}\Big(\alpha_j \|\bar{v}\|_\infty + \frac{\beta_j}{\gamma_j}\|\bar{v}\|_\infty^{\gamma_j+1}\Big)$$
$$\geq \int_{T/4}^{3T/4} G(t,d)\, dt - \frac{\mu}{\lambda}\frac{4\tilde{a}d^p}{k}\Gamma_{(d\sqrt[p]{4/k})}$$

Also, we obtain

$$\frac{\Psi(\bar{v})}{\Phi(\bar{v})} \geq$$
$$\frac{pkT^{p-1}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} G(t,d)dt - \frac{4\mu}{\lambda}\tilde{a}pT^{p-1}d^p\Gamma_{(d\sqrt[p]{4/k})}}{4d^p a_0(1 + M_0 L)}$$

Since $\mu < \delta$, one has

$$\frac{\Psi(\bar{v})}{\Phi(\bar{v})} > \frac{1}{\lambda}. \tag{14}$$

Therefore, from (**??**) and (**??**), condition (i) of Theorem **??** is fulfilled. Taking into account (A3), Lemma **??**, Proposition **??**, (**??**), (**??**) it follows that the functional $\Phi - \lambda\Psi$ is coercive. Now, the conclusion of Theorem **??** can be used. It follows that, for every $\lambda \in \Lambda$, the functional $\Phi - \lambda\Psi$ has at least three distinct critical points in X, which are the weak solutions of the problem (**??**). This completes the proof. □

Example 2.3. *The problem*

$$-(\phi_3(u'(t)))' + (t^2+1)\phi_3(u(t)) =$$
$$\lambda t(4u^3 - 5u^4) + (\arctan\frac{u}{3})^2 a.e. \ in\ [0,1]$$
$$u(0) = u(1) = 0$$
$$\Delta(\phi_3(u'(t_1))) = \phi_3(u'(t_1^+)) - \phi_3(u'(t_1^-)) =$$
$$\mu(1 - \sqrt[5]{u(t_1)})$$

admits at least three non-trivial solutions for each $\lambda \in [946, 4444]$ *and for each* $0 < \mu < (\frac{196}{10^{11}} - \frac{44\lambda}{10^{14}})$

Indeed, it is sufficient to apply Theorem **??** *by choosing, for instance,* $c = 10^{-4}$ *and* $d = 1/2, L = \frac{1}{3}$.

References

[1] G. Bonanno, S.A.Marano, *On the structure of the critical set of non-differentiable functionals with a weak compactness condition*, Appl. Anal., vol.89, pp.1-10, 2010.

[2] G. Bonanno, B.D. Bella and J. Henderson, *Existence of solutions to second-order boundary-value problems with small perturbations of impulses*, Electronic Journal of Differential Equation, vol.2013, pp.1-14, 2013.

[3] M.A. Del Pino, M. Elgueta and R.A. Mansevich, *A homotopic deformation along p of a LeraySchauder degree result and existence for* $((|u'|^{p-2}u')' + f(t,u(t)) = 0, u(0) = u(T) = 0, p > 1$, J. Differ. Equat., vol.80, pp.1-13, 1989.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

بررسی پایداری و انشعاب موضعی هاف در یک سیستم شکار و شکارچی تاخیری با اثر تابعی نوع میکلیس-منتن

مرتضی شریفی *، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه بیرجند، morteza.sharifi۱۴@birjand.ac.ir

امید ربیعی مطلق ، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه بیرجند، orabieimotlagh@birjand.ac.ir

حاجی محمد محمدی‌نژاد ، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه بیرجند، hmohammadin@birjand.ac.ir

چکیده: بررسی پایداری سیستم‌های معادلات دیفرانسیل یکی از مسائل مهم در سال‌های اخیر برای ریاضی‌دانان بوده‌اند. در این مقاله به بررسی پایداری یک سیستم شکار و شکارچی تاخیری با اثر تابعی نوع میکلیس-منتن می‌پردازیم. ضمن به‌دست آوردن نقاط تکین به کمک تحلیل چندجمله‌ای مشخصه به بررسی پایداری نقاط تکین مثبت پرداخته و نشان می‌دهیم که سیستم تحت شرایط خاص انشعاب هاف موضعی دارد.

کلمات کلیدی: معادلات تاخیری، مدل شکار و شکارچی، پایداری، انشعاب هاف موضعی

۱ مقدمه

در سال ۲۰۰۲ ژو و کاپلین [۲] سیستم شکار و شکارچی تاخیری با اثر تابعی نوع میکلیس-منتن زیر را مورد مطالعه قرار دادند :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(t)\Big[a_1 - a_{11}x_1(t-\tau_{11}) - \frac{a_{21}x_2(t)}{m_1+x_1(t)}\Big],$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(t)\Big[-a_2 + \frac{a_{21}x_1(t-\tau_{21})}{m_1+x_1(t-\tau_{21})}$$

$$-a_{22}x_2(t-\tau_{22}) - \frac{a_{23}x_3(t)}{m_2+x_2(t)}\Big]$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3(t)\Big[-a_3 + \frac{a_{32}x_2(t-\tau_{32})}{m_2+x_2(t-\tau_{32})} - a_{33}x_3(t-\tau_{33})\Big], \qquad (۱)$$

با شرایط اولیه :

$$x_i(t) = \phi_i(t),\ t\in[-\tau,0],\ \phi_i(0)>0,\ i=1,2,3$$

که $x_1(t)$، $x_2(t)$ و $x_3(t)$ به ترتیب چگالی جمعیت شکار، شکارچی و بالا شکارچی است. a_i و a_{ij} ثابت‌های مثبتی هستند و τ_{11}، τ_{21}، τ_{22}، τ_{32} و τ_{33} ثابت‌های نامنفی هستند. τ_{11}، τ_{22} و τ_{33} به ترتیب نشان دهنده زمان بازخورد منفی به ترتیب در جمعیت شکار، شکارچی و ازدحام بالای شکارچیان است. τ_{21} و τ_{32} زمان تاخیر در بارداری را نشان می‌دهد به این معنی که، رشد شکارچیان بالغ می‌تواند فقط تولید توده شکارچیان را فراهم کند. همچنین $\phi_1(t)$ $(i=1,2,3)$ توابع کراندار پیوسته در بازه $[-\tau,0]$ هستند که در آن $\tau=\max\{\tau_{11},\tau_{21},\tau_{22},\tau_{32},\tau_{33}\}$. در این مقاله ما به بررسی پایداری نقاط تکین و انشعاب موضعی هاف سیستم (۱) می‌پردازیم. همچنین نشان می‌دهیم تحت چه شرایطی سیستم (۱) از یک انشعاب هاف عبور می‌کند.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

۲ پایداری نقاط تکین مثبت و انشعاب هاف موضعی

سیستم (۱) چهار نقطه تکین نامنفی به صورت زیر دارد :

$$E_1 = (0,0,0), \qquad E_2 = (\tfrac{a_1}{a_{11}}, 0, 0)$$
$$E_3 = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, 0), \quad E_* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \qquad (۲)$$

قرار دهید :

$$(H_1) : a_1(a21 - a_2) > m_1 a_2 a_{11},$$
$$(H_2) : (a_{32} - a_3)[a_1(a_{21} - a_2) - m_1 a_2] - m_2 a_3 a_{22}(a_1 + m_1 a_{11}) > 0,$$
$$(H_3) : \tilde{x}_2(a_{32} - a_3) - m_2 a_3 > 0,$$
$$(H_4) : a_{22}(a_{11} - (a_1/m_1)) - (a_{22}a_{21}/m_1^2).$$

با توجه به [۱] اگر (H_1)، (H_2)، (H_3) و (H_4) برقرار باشد، E_3 و E_* همیشه نقاط تکین مثبت خواهند بود. فرض کنید $E = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ یک نقطه تکین باشد و همچنین فرض کنید $\bar{x}_1(t) = x_1(t) - x_{10}$، $\bar{x}_2(t) = x_2(t) - x_{20}$ و $\bar{x}_3(t) = x_3(t) - x_{30}$ در این صورت سیستم خطی سازی شده متناظر با (۱) در نقطه E به صورت زیر است :

$$\dot{u}(t) = Bu(t) + cu(t-\tau_1) + Du(t-\tau_2), \qquad (۳)$$

که در آن :

$$u(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T,$$
$$B = (b_{ij})_{3\times3},\ C = (c_{ij})_{3\times3},\ D = (d_{ij})_{3\times3},$$
$$b_{11} = a_1 - 2a_{11}x_{10} - \tfrac{a_{12}m_1x_{20}}{(m_1+x_{10})^2},\ b_{12} = -\tfrac{a_{12}x_{10}}{m_1+x_{10}},$$
$$b_{22} = -a_2 + \tfrac{a_{12}x_{10}}{m_1+x_{10}} - 2a_{22}x_{20} - \tfrac{a_{23}m_2x_{30}}{(m_2+x_{20})^2},$$
$$b_{23} = -\tfrac{a_{23}x_{20}}{m_2+x_{20}},\ b_3 = -a_3 + \tfrac{a_{32}x_{20}}{m_2+x_{20}} - 2a_{33}x_{30},$$
$$c_{21} = \tfrac{a_{21}m_1x_{20}}{(m_1+x_{10})^2},\ d_{32} = \tfrac{a_{32}m_2x_{30}}{(m_2+x_{20})^2}, \qquad (۴)$$

و بقیه b_{ij}، c_{ij} و d_{ij} ها صفر هستند. اکنون معادله مشخصه (۳) به صورت زیر است :

$$\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 + (q_1\lambda + q_0)e^{-\lambda\tau_1} + (r_1\lambda + r_0)e^{-\lambda\tau_2} = 0, \qquad (۵)$$

که در آن :

$$p_2 = (b_{11} + b_{22} + b_{33}),$$
$$p_1 = b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} + b_{11}b_{33},$$
$$p_0 = -b_{11}b_{22}b_{33}, \qquad (۶)$$
$$q_1 = -b_{12}c_{21},\ q_0 = b_{12}c_{21}b_{33},$$
$$r_1 = -b_{23}b_{32},\ r_0 = b_{11}b_{23}d_{32}.$$

اکنون حالات زیر را بررسی می‌کنیم :

(۱) : $E = E_1$. معادله مشخصه به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$(\lambda - a_1)(\lambda + a_2)(\lambda + a_{30}) = 0. \qquad (۷)$$

این معادله همیشه یک ریشه مثبت a_1 و دو ریشه منفی a_2 و a_3 دارد بنابراین E_1 یک نقطه زینی است.

(۲) : $E = E_2$. معادله (۵) به فرم زیر تبدیل می‌شود :

$$(\lambda + a_1)\left(\lambda + a_2 - \frac{a_1a_{12}}{m_1a_{11} + a_1}\right)(\lambda + a_3) = 0. \qquad (۸)$$

در این صورت با این شرط که $a_1a_{12}/(m_1a_{11} + a_1) < a_2$ ، بنابراین نقطه E_2 یک نقطه زینی است و اگر $a_1a_{12}/(m_1a_{11} + a_1) > a_2$، E_2 پایدار مجانبی است.

(۳) : $E = E_3$. در این صورت معادله مشخصه به صورت زیر است :

$$(\lambda - b_{33})[\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + b_{11}b_{22} - b_{12}c_{21}e^{-\lambda\tau_1}] = 0. \qquad (۹)$$

با توجه به [۱] نتایج زیر را داریم :

لم ۱.۲ *اگر E_3 یک نقطه تکین نا منفی باشد در این صورت داریم :*

۱. *اگر $b_{33} > 0$، E_3 ناپایدار است.*

۲. *اگر $b_{33} < 0$، $b_{11} + b_{22} < 0$، $b_{11}b_{22} - b_{12}c_{21} > 0$ و $b_{11}b_{22} + b_{12}c_{21}$ در این صورت E_3 ، پایدار مجانبی است.*

(۴) : $E = E_*$. معادله مشخصه در این حالت همان معادله (۵) است. در این مرحله چهار حالت رخ می‌دهد که به ترتیب آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

(a) : فرض کنید $\tau_1 = \tau_2 = 0$ در این صورت معادله مشخصه به صورت زیر است :

$$\lambda^3 + p_2\lambda^2 + (p_1 + q_1 + r_1)\lambda + (p_0 + q_0 + r_0) = 0. \qquad (۱۰)$$

قرار دهید :

$$(H_5) : p_2 > 0,\ p_2(p_1 + q_1 + r_1) - (p_0 + q_0 + r_0) > 0,$$
$$p_0 + q_0 + r_0 > 0.$$

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

قضیه ۲.۲. [۱] برای $\tau_1=\tau_2=0$، فرض کنید که $(H_1)-(H_5)$ برقرار باشد، آنگاه زمانی‌که $\tau_1=\tau_2=0$، نقطه تکین مثبت E_* از سیستم (۱) پایدار مجانبی است.

(b) : اگر $\tau_1=0$ و $\tau_2>0$ در نتیجه داریم :

$$\lambda^3+p_2\lambda^2+(p_1+q_1)\lambda+(p_0+q_0)+(r_1\lambda+r_0)e^{-\lambda\tau_2}=0. \qquad (۱۱)$$

فرض کنید $\lambda=i\omega\ (\omega>0)$ یک ریشه از (۱۱) باشد، بنابریان داریم :

$$\begin{aligned}&-i\omega^3-p_2\omega^2+i(p_1+q_1)\omega+(p_0+q_0)\\&+(r_1\omega i+r_0)(\cos\omega\tau_2-i\sin\omega\tau_2)=0.\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

با جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم :

$$\begin{aligned}&-\omega^3+(p_1+q_1)\omega=r_0\sin\omega\tau_2-r_1\omega\cos\omega\tau_2,\\&-p_2\omega^2+(p_0+q_0)=-r_1\omega\sin\omega\tau_2-r_0\cos\omega\tau_2.\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

در نتیجه :

$$\omega^6+m_{21}\omega^4+m_1\omega^2+m_{10}=0, \qquad (۱۴)$$

که در آن :

$$\begin{aligned}&m_{12}=p_2^2-2(p_1+q_1),\ m_{11}=(p_1+q_1)^2\\&-2p_2(p_0+q_0)-r_1^2,\ m_{10}=(p_0+q_0)^2-r_0^2.\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

اگر قرار دهید $z=\omega^2$ داریم :

$$h_1(z)=z^3+m_{21}z^2+m_1z+m_{10}=0. \qquad (۱۶)$$

در این صورت داریم :

لم ۳.۲. [۱]

۱. اگر $m_{10}\geq 0$ و $\Delta=m_{12}^2-3m_{11}\leq 0$، آنگاه (۱۶) برای $z\in[0,+\infty)$ ریشه مثبت دارد.

۲. اگر $m_{10}\geq 0$ و $\Delta=m_{12}^2-3m_{11}>0$، (۱۶) حداقل یک ریشه مثبت دارد اگر و فقط اگر $z_{11}^*=(-m_2+\sqrt{\Delta})/3>0$ و $h_1(z_{11}^*)<0$.

۳. اگر $m_{10}<0$، (۱۶) حداقل یک جواب مثبت دارد.

بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود، فرض کنیم (۱۶) سه ریشه مثت z_{11}، z_{12} و z_{13} داشته باشد، آنگاه (۱۴) سه ریشه مثبت به صورت زیر دارد :

$$\omega_{11}=\sqrt{z_{11}},\ \omega_{12}=\sqrt{z_{12}},\ \omega_{13}=\sqrt{z_{13}}. \qquad (۱۷)$$

از (۱۳) داریم که :

$$\begin{aligned}&\cos\omega_{1k}\tau_{2_{1k}}\\&=\frac{r_1\omega_{1k}^4+[p_2r_0-(q_1+p_1)r_1]\omega_{1k}^2-r_0(q_0+p_0)}{r_0^2+r_1^2\omega_{1k}^2}.\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

بنابراین اگر نشان دهیم :

$$\begin{aligned}&\tau_{2_{1k}}^{(j)}=\frac{1}{\omega_{1k}}\\&\times\{\arccos\big((r_1\omega_{1k}^4+[p_2r_0-(q_1+p_1)r_1]\omega_{1k}^2\\&-r_0(q_0+p_0)\times(r_0^2+r_1^2\omega_{1k}^2)^{-1}\big)+2j\pi\},\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

که $k=1,2,3; j=0,1,2,\cdots$. بنابراین $\pm i\omega_{1k}$ یک جفت ریشه موهومی محض از (۱۱) متناظر با $\tau_{2_{1k}}^{(j)}$ است. با توجه به لم ۱ و ۵ در [۱] و لم (۳.۲) و قضیه (۲.۲) قضیه زیر را می‌توان نتیجه گرفت :

قضیه ۴.۲. [۱] برای $\tau_1=0$ و $\tau_2>0$ فرض کنید $(H_1)-(H_5)$ برقرار باشد در این صورت :

۱. اگر $m_{10}\geq 0$ و $\Delta=m_{12}^2-3m_{11}\leq 0$، آنگاه همه ریشه‌های (۵) قسمت حقیقی منفی دارند برای همه $\tau_2\geq 0$ و نقطه تکین مثبت E_* برای همه $\tau_2\geq 0$ به طور موضعی پایدار مجانبی است.

۲. اگر $m_{10}<0$ یا $m_{10}\geq 0$، $Delta=m_{12}^2-3m_{11}>0$، $z_{11}^*\geq 0$ و $h_1(z_{11}^*)\leq 0$ آنگاه $h_1(z)$ حداقل یک ریشه مثبت دارد و همه ریشه‌های (۱۳) برای $\tau_2\in[0,\tau_{1_{20}})$ قسمت حقیقی منفی دارند و نقطه تکین E_* برای $\tau_2\in[0,\tau_{1_{20}})$ به طور موضعی پایدار مجانبی است.

۳. اگر (۲) برقرار باشد و $h_1'(z_{1k})\neq 0$، آنگاه سیستم (۱) برای $\tau_2=\tau_{1k}^{(j)}$ $(k=1,2,3)$ و $(j=0,1,2,\cdots)$ در نقطه تکین مثبت E_* از یک انشعاب هاف عبور می‌کند.

(c) : اگر $\tau_1>0$ و $\tau_2=0$ در این صورت معادله مشخصه سیستم (۱) به صورت زیر است :

$$\lambda^3+p_2\lambda^2+(p_1+r_1)\lambda+(p_0+r_0)(q_1\lambda+q_0)e^{-\lambda\tau}=0. \qquad (۲۰)$$

قضیه ۵.۲. [۱] برای $\tau_1>0$ و $\tau_2=0$ فرض کنید که $(H_1)-(H_5)$ برقرار باشد.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

۱. اگر $m_{20} \geq 0$ و $\Delta = m_{22}^2 - 3m_{21} \leq 0$، آنگاه همه ریشه‌های (۳.۲) برای $\tau_1 \geq 0$ قسمت حقیقی منفی دارند و نقطه تکین E_* برای $\tau_1 \geq 0$ به طور موضعی پایدار مجانبی است.

۲. اگر $m_{20} < 0$ یا $m_{20} \geq 0$، $\Delta = m_{22}^2 - 3m_{21}$، z_{21}^* و $h_2(z_{21}^*) \leq 0$، آنگاه $h_2(z)$ حداقل یک ریشه مثبت z_{2k} دارد و همه ریشه های (۳.۲) برای $\tau_1 \in [0, \tau_{1_{20}})$ قسمت حقیقی منفی دارند. همچنین نقطه تکین E_* برای $\tau_1 \in [0, \tau_{1_{20}})$ به طور موضعی پایدار مجانبی است.

۳. اگر (۲) برقرار باشد و $\acute{h}_1(z_{2k}) \neq 0$، آنگاه سیستم (۱) برای $\tau_1 = \tau_{1_{2k}}^{(j)}$ $(k = 1,2,3; j = 0,1,2,\cdots)$ در نقطه تکین E_* از یک انشعاب هاف عبور می‌کند.

که در آن

$$m_{22} = p_2^2 - 2(p_1 + r_1),$$
$$m_{21} = (p_1 + r_1)^2 - 2p_2(p_0 + r_0) - q_1^2,$$
$$m_{20} = (p_0 + r_0)^2 - q_0^2;$$
$$h_2(z) = z^3 + m_{22}z^2 + m_{21}z + m_{20}, \quad z_{21}^* = \frac{-m_{22} + \sqrt{\Delta}}{3};$$
$$\tau_{1_{2k}}^{(j)} = \frac{1}{\omega_{2k}} \times \{ \arccos\left((q_1\omega_{2k}^4 + [p_2 q_0 - (r_1 + p_1)q_1]\omega_{2k}^2 - q_0(r_0 + p_0) \times (q_0^2 + q_1^2\omega_{2k}^2)^{-1} \right) + 2j\pi \}, \tag{۲۱}$$

که $k = 1,2,3; j = 0,1,2,\cdots$. بنابراین $\pm i\omega_{2k}$ یک جفت ریشه موهومی محض از (۲۰) متناظر با $\tau_{1_{2k}}^{(j)}$ است.

(d) : فرض کنید $\tau_1 > 0$، $\tau_2 > 0$ و $\tau_1 \neq \tau_2$ در این صورت داریم :

$$\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 + (q_1\lambda + q_0)e^{-\lambda\tau_1} + (r_1\lambda + r_0)e^{-\lambda\tau_2} = 0. \tag{۲۲}$$

اکنون با توجه به [۱] شرط زیر را داریم :

$$(H_6) : ((dRe(\lambda))/d\tau_1)|_{\lambda = \pm i\omega_{1k}^{(j)}} \neq 0. \tag{۲۳}$$

در این صورت بنا به قضیه انشعاب هاف کلی برای معادلات دیفرانسیل تاخیری قضیه زیر را داریم :

قضیه ۶.۲ [۱] برای $\tau_1 > 0$، $\tau_2 > 0$ و $\tau_1 \neq \tau_2$، فرض کنید که $(H_1) - (H_6)$ برقرار باشند. اگر $m_{30} < 0$ و $\tau_2^* \in [0, \tau_{2_{10}}]$، آنگاه نقطه تکین مثبت E_* برای $\tau_1 \in [0, \tau_{10})$ به طور موضعی پایدار مجانبی است. همچنین سیستم (۱) در نقطه تکین E_* برای $\tau_1 = \tau_{1k}^{(j)}$ از یک انشعاب هاف عبور می‌کند.

که در آن

$$m_{30} = p_0^2 + 2p_0 r_0 \cos\omega\tau_2^* + r_0^2 - q_0^2.$$

۳ شبیه سازی عددی

در این بخش سیستم (۱) را با ضرایب زیر بررسی می‌کنیم :

$a_1 = 0.3,\ a_{11} = 5.8889,\ a_{12} = 1,\ m_1 = 1,\ a_2 = 0.1,$
$a_{21} = 27,\ a_{22} = 12,\ a_{23} = 12,\ m_2 = 1,\ a_3 = 0.2,$
$a_{32} = 25,\ a_{33} = 12,$

در این صورت نقطه تکین E_* به صورت زیر به دست می‌آید :

$$E_* = (0.0451, 0.0357, 0.0551).$$

در نتیجه مقادیر زیر را می‌توانیم محاسبه کنیم :

$$m_{10} = -0.0104,\ \omega_{11} = 0.5164,\ z_{11} = 0.2666,$$
$$\acute{h}_1(z_{11}) = 0.3402,\ \tau_{20} = 3.2348,.$$

با استفاده از قضیه (۴.۲) می‌دانیم زمانی‌که $\tau_1 = 0$، نقطه تکین E_* برای $\tau \in [0, 3.2348)$ به طور موضعی پایدار مجانبی است. زمانی که τ_2 از τ_{2_0} می‌گذرد، پایداری نقطه تکین E_* کاهش یافته و سیستم از یک انشعاب هاف عبور می‌کند.

مراجع

References

[1] Yunxian Dai, Yiping Lin, Huitao Zhao "Hopf Bifurcation and Global Periodic Solutions in a Predator-Prey System with Michaelis-Menten Type Functional Response and Two Delays" Volume 2014, Article ID 835310, 16 pages (2014).

[2] R. Xu, M. A. J. Chaplain, "Persistence and global stability in a delayed predator-prey systemwith Michaelis-Menten type functional response," Applied Mathematics and Computation, vol. 130, no. 2-3, pp. 441–455, 2002.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

Non-Local Morphological PDEs and level set equation for front propagation on weighted graphs

Toba Rajabzade,* Department of Mathematics, Persian Gulf University, Iran,
rajabzadeht@yahoo.com
Fereshte Bahrani, Department of Mathematics, Persian Gulf University, Iran,
fereshteh136667@yahoo.com

Abstract: we introduce a new class of non-local p-Laplacian operators involve discrete morphological gradient on graphs. We also consider non-local diffusion on graphs involving these operators. Finally, we propose a general formulation and an method for propagation of fronts evolving on a weighted graph. This method is used in the images segmentation.

Keywords: Weighted graph, Segmentation, p-Laplacian, PDE-based morphological processes, Front propagation.

1 Introduction

In the last decade, there has been an increasing interest in local and non-local p-Laplacian on Euclidean domains and graphs. Many nonlinear problems in physics, image processing are formulated in equations that contain the p-Laplacian. In this paper, we introduce PDE-based morphological processes such as ∞-Laplacian and the level set equation. Then we investigate link level set formulation as it was introduced by Osher-Sethian [2] with the laplacian diffusion and the eikonal equation for front propagation, and extend it to weighted graphs. This transcription is based on a framework of PdEs [1] along with a family of weighted gradients.

*Corresponding Author

2 Partial difference Equations on graphs

A weighted graph $G = (V, E, w)$ consists in a finite set V of vertices and a finite set $E \subseteq V \times V$ of weighted edges. An edge $(u, v) \in E$ connects two adjacent vertices u and v. The weight $w(u, v)$of an edge (u, v) can be defined with a function $w : V \times V \to R^+$ if $(u, v) \in E$, and $w(u, v) = w_{uv} = 0$ otherwise. Let $f : V \to R$ be a real-valued function that assigns a real value $f(u)$ to each vertex $u \in V$. Let $\mathcal{H}(V)$ and $\mathcal{H}(E)$ be the Hilbert space of real valued functions on the vertices and on the edges.

2.1 Differences and gradients operators on weighted graphs

Let $f \in \mathcal{H}(V)$, The gradient or difference operator of f , noted $\mathcal{G}_w : \mathcal{H}(V) \to \mathcal{H}(E)$, is defined on an

edge $(u, v) \in E$ by $(\mathcal{G}_w f)(u, v) := \gamma(w_{uv})(f(v) - f(u))$, where $\gamma : R^+ \to R^+$depends on the weight function (in the sequel we denote $\gamma(w_{uv})$by γ_{uv}). the two upwind gradients $\mathcal{G}_w^{\pm} : \mathcal{H}(V) \to \mathcal{H}(E)$, are expressed by $\mathcal{G}_w^{\pm} f(u, v) := \gamma_{uv}(f(v) - f(u))^{\pm}$; with the notation $(x)^+ = \max(0, x)$ and $(x)^- = -\min(0, x)$. The discrete weighted gradient of a function $f \in \mathcal{H}(V)$, noted $\nabla_w : \mathcal{H}(V) \to R$ is defined as $(\nabla_w f)(u) := ((\mathcal{G}_w f)(u, v))^T_{v \in V}$. Similarly, discrete upwind weighted gradients are defined as $(\nabla_w^{\pm} f)(u) := ((\mathcal{G}_w f)^{\pm}(u, v))^T_{v \in V}$. The $\mathcal{L}_p$ norms, $1 \leq p < \infty$ and the $\mathcal{L}_\infty$ norm of these gradients respectively are expressed as $\|(\nabla_w^{\pm} f)(u)\|_p = \left[\sum_{v \in V} \gamma_{uv}^p (f(v) - f(u))^{\pm p}\right]^{\frac{1}{p}}$ and $\|(\nabla_w^{\pm} f)(u)\|_\infty = \max_{v \in V}(\gamma_{uv}|(f(v) - f(u))^{\pm}|)$.

2.2 PdE-based morphological processes

Let $\mathcal{A}$ be a set of connected vertices with $\mathcal{A} \subset V$ such that for all $u \in \mathcal{A}$, there exists a vertex $v \in \mathcal{A}$, with $(u, v) \in E$. We denote the external and internal boundary sets of $\mathcal{A}$, respectively as: $\partial^+ \mathcal{A} = \{u \in \overline{\mathcal{A}} : \exists v \in \mathcal{A} \ with \ (u, v) \in E\}$ and $\partial^- \mathcal{A} = \{u \in \mathcal{A} : \exists v \in \overline{\mathcal{A}} \ with \ (u, v) \in E\}$. Let $f \in \mathcal{H}(V)$, Morphological dilation and erosion processes on f are defined Respectively as $\delta(f)(u) := \partial_t f(u) = \|(\nabla_w^+ f)(u)\|_p$ and $\varepsilon(f)(u) := \partial_t f(u) = -\|(\nabla_w^- f)(u)\|_p$.

2.3 The anisotropic p-Laplacian $(1 \leq p < \infty)$

The weighted p-Laplace anisotropic operator of a function $f \in \mathcal{H}(V)$, noted $\Delta_{w,p} : \mathcal{H}(V) \to \mathcal{H}(V)$ is defined by:

$$(\Delta_{w,p} f)(u) = \frac{1}{2} D_w\Big(|\mathcal{G}_w f|^{p-2}(\mathcal{G}_w f)\Big)(u) \qquad (1)$$
$$= \sum_{v \sim u} \gamma_{uv}^p |f(v) - f(u)|^{p-2}(f(v) - f(u)),$$

for $1 \leq p < \infty$, at a vertex $u \in V$ with $w'(u, v) = w(u, v)^{\frac{p}{p-1}}$,

$$(\Delta_{w,(p+1)} f)(u) = \|(\nabla_{w'}^+ f)(u)\|_p^p - \|(\nabla_{w'}^- f)(u)\|_p^p \qquad (2)$$

Proof. From (1), we have $(\Delta_{w,p} f)(u) = \sum_{v \sim u} w(u, v)^{\frac{p}{2}} |f(v) - f(u)|^{p-2}(f(v) - f(u))$ Since $|x| = x^+ + x^-$ and $x = x^+ - x^-$, one has, with $A = (f(v) - f(u))$: $(\Delta_{w,(p+1)} f)(u) = \sum_{v \sim u} w(u, v)^{\frac{p+1}{2}}(A^- - A^+)(A^+ + A^-)^{p-1}$. Then, by developing $(A^+ + A^-)^{p-1}$, since $A^+ A^- = 0$, it is easy to obtain (2) □

2.4 p-Laplacian diffusion on graphs

We recall that the p-Laplacian of a function $f : \Omega \subset R^n \to R$ is given as $\Delta_p f = (|\nabla f|^{p-2} \nabla f) = |\nabla f|^{p-2}\{(p-2)\Delta_\infty f + \Delta f\}$. Here Δ_∞ is called infinity Laplacian operator. The ∞-Laplacian operator can be be rewritten following as a morphological operator on graphs, involving non-local dilation and non-local erosion previously defined, where is a new definition of the ∞-Laplacian.

$$(\Delta_{w,\infty} f)(u) := \frac{1}{2}\left[\|(\nabla_w^+ f)(u)\|_\infty - \|(\nabla_w^- f)(u)\|_\infty\right]. \qquad (3)$$

using discrete version of p-Laplacian, a non-local version of the normalized p-Laplacian is given by the equation $\Delta_{w,\alpha,\beta} f(u) = \alpha(\Delta_{w,\infty} f)(u) + \beta(\Delta_{w,2} f)(u)$. we now study a non-local diffusion problem involving the non-local p-Laplacian operator. Given the following equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(u,t)}{\partial t} = \Delta_{w,\alpha,\beta} f(u,t) \\ f(u, t = 0) = f^0(u) \end{cases} \qquad (4)$$

One has $\frac{\partial f(u,t)}{\partial t} = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t}$ where $f^n(u) = f(u, n\Delta t)$, $\Delta t = \lambda$. Then

$$f^{n+1}(u) = f^n(u) + \frac{1}{2}\lambda\alpha\left[\|(\nabla_w^+ f)(u)\|_\infty - \|(\nabla_w^- f)(u)\|_\infty\right] + \lambda\beta\Big[\sum$$

Where the final term is called non local means.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

3 propagation of fronts evolving on a weighted graph

We will introduce our graph-based equation for outward front propagation. This equation came from the classical continuous level set formulation and can be linked with the eikonal equation. An method to solve the proposed equation is presented.

3.1 Level set formulation and link with laplacian diffusion

Let G be a weighted graph. At time t, a front Γ evolving on G is defined as a subset $\Omega_t \subset V$, and can be represented by a level set function ϕ_t that equals 1 in Ω_t and -1 on its complementary. Let $\mathcal{F} : V \to R$ be a speed function. The front moves inward when the speed is negative and outward when the speed is positive. The level set formulation is as $\frac{\partial\phi}{\partial t} = \mathcal{F}\|\nabla\phi\|_p$ such that the 0 level set of ϕ provides the position of the front at time t. The motion by mean curvature in the level set equation when ϕ is a signed distance function, becomes the Laplacian diffusion equation.Transposed the level set formulation on a weighted graph G, and using the discrete operators we have $\frac{\partial\phi}{\partial t}(u,t) = \mathcal{F}(u)\|(\nabla_w\phi)(u,t)\|_p$. Let Γ be a front represented by the subset Ω_0. We denote by N_0^+ the narrow band of vertices $u \in \partial^+\Omega_0$ likely to be added to Ω_0. Similarly, we denote by N_0^- the narrow band of vertices $u \in \partial^-\Omega_0$ likely to be added to $\overline{\Omega_0}$. On narrow bands of Ω_0, one has the property $\|(\nabla_w\phi)(u,t)\|_p = \|(\nabla_w^+\phi)(u,t)\|_p$, for all $u \in N_0^+$ and $\|(\nabla_w\phi)(u,t)\|_p = \|(\nabla_w^-\phi)(u,t)\|_p$, for all $u \in N_0^-$.

Proof. According to the relation between gradient norms, one has

$$\|(\nabla_w\phi)(u,t)\|_p = \left[\|(\nabla_w^+\phi)(u,t)\|_p^p + \|(\nabla_w^-\phi)(u,t)\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}. \quad (5)$$

In the case where $u \in N_0^+$, we have $\phi(u,0) = -1$. Then according to the gradient norms definition, we have $\|(\nabla_w^-\phi)(u,0)\|_p = 0$. Similarly, in the case where $u \in N_0^-$ we have $\|(\nabla_w^+\phi)(u,0)\|_p = 0$. □

3.2 Link level set formulation with the eikonal equation and Fast Marching method

According to the theorem (3.1), the propagation of front Γ can be represented by the level set function ϕ and described by the morphological process: $\frac{\partial\phi}{\partial t}(u,t) = \mathcal{F}\|(\nabla_w^+\phi)(u,t)\|_p$, for all $u \in N_0^+$. Considering the case where the speed $\mathcal{F}$ never changes sign, relation between the level set formulation and the eikonal equation comes from the change of variable $\phi(x,t) = t - \mathcal{T}(x)$, so previous the morphological process for $u \in N_0^+$ can be rewritten as:$\mathcal{F}\|(\nabla_w^-\mathcal{T}(u))\|_p = 1, \forall\ u \in \overline{\Omega_0}$ and $\mathcal{T}(u) = 0, \forall\ u \in \Omega_0$. An method to solve this equation is the Fast Marching method. On an arbitrary graph, the Fast Marching consists in an active list of vertices for which the solution is already known and fixed, and in a narrow band of vertices which are not yet fixed and vertices that are neither active nor in the narrow band are said far away. Notice that this method is used in the images segmentation. The inward evolution of Γ (when $\mathcal{F} < 0$) can be expressed as an outward evolution of Γ^c.

Proof. In the case where $\mathcal{F} < 0$, according to theorem(3.1) and as $\phi(u) = -\phi^c(u)$ the level set formulation using the discrete operators can be rewritten as: $\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = \mathcal{F}\|(\nabla_w^-\phi)\|_p = \mathcal{F}\|(\nabla_w^+\phi^c)\|_p = \mathcal{F}\|(\nabla_w^-\mathcal{T}^c)\|_p$ with $\mathcal{T} : V \to R$ is the arrival time of Γ^c , defined by $\phi^c = t - \mathcal{T}^c$. we obtain $\mathcal{F}\|(\nabla_w^-\mathcal{T}^c)\|_p = 1$. □

According to the theorem (3.2), inward/outward fronts evolution can be expressed by the single static outward front evolution equation. Inward/outward evolution of a front Γ defined by $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ is equivalent to outward evolution of Γ' defined by $\Gamma' = \Omega^+ \cup \overline{\Omega^-}$.

Proof. According to theorem (3.2), inward evolution of a front defined by Ω^- is equivalent to outward evolution of a front defined by $\overline{\Omega^-}$. $\square$

Then, considering fronts Γ^+ defined by the subset Ω^+ and Γ^- defined by the subset $\overline{\Omega^-}$, and according to theorem (3.2), the propagation of front can be performed by the simultaneous propagation of fronts Γ^+ and Γ^-.

References

[1] A. Elmoataz, O. Lezoray, and S. Bougleux, Nonlocal discrete regularization on weighted graphs: A framework for image and manifold processing, IEEE Trans., **17** (2008) 1047-1060.

[2] J. A. Sethian, Level Set Methods and Fast Marching Methods,Cambridge University Press, (1999).

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

روش تفاضلی توان در زمان برای حل عدی معادلات دیفرانسیل سخت

زینب موسوی نژاد ، دانشجوی کار شناسی ارشد، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، m۹۱۱۶۱۰۰۹@post.vru.ac.ir
سید محمد حسینی ، استاد یار گروه ریاضی، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، smhoseini@.vru.ac.ir

چکیده:
بررسی ما بروی روش تفاضل توانی در زمان متمرکز شده است که برای حل مسائل دیفرانسیل سخت طراحی شده است. روش تفاضلی توانی در زمان بخش خطی را به صورت دقیق حل می‌کند و سپس بخش باقی مانده (بخش غیر خطی) را با استفاده از تقریب‌های چند جمله‌ای صریحاٌ برآورد می‌کند، سرانجام بعضی از مثال‌های عددی کارایی این روش را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: روش تفاضلی توان در زمان، معادلات دیفرانسیل سخت

مقدمه

مسائل دیفرانسیل سخت به این دلیل که اغلب در مدل بندی مسائل علمی مانند واکنش‌های شیمیایی، مدارهای الکتریکی و نظریه کنترل ظاهر می‌شوند از اهمیت زیادی در حوزه آنالیز عددی برخوردار هستند. اما با وجود اهمیت این گونه مسائل تاکنون تعریف جامعی از آنها ارائه نشده است تا جائیکه ژاسکوییچ تعریف پدیده سختی را در یک رفتار ریاضی گونه مشکل می‌داند. هایرر و ونر بیان می‌کنند که معادلات دیفرانسیل سخت مسائلی هستند که برای روش صریح کار نمی کنند. لمبرت نشان می دهد رفتار سختی وابسته به جواب دقیق مسئله نیست بلکه خاصیتی مربوط به خود معادله دیفرانسیل می‌باشد. همچنین ، او در نهایت با بررسی و آنالیز گزاره‌هایی که کاندیدهایی برای تعریف سختی یک معادله دیفرانسیل بودند به تعریف زیر رسید اگریک روش با ناحیه پایداری متناهی به یک دستگاه با هر شرط اولیه اعمال شود ودر یک بازه محاسباتی مشخص مجبور به استفاده از طول گام بیش ازحد کوچک در رابطه با هموراری جواب دقیق در آن بازه شویم دستگاه در آن بازه سخت گفته می‌شود .

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳
دانشگاه سمنان

استخراج فرمول کلی برای روش تفاضلی توان در زمان

برای استخراج روش‌های تفاضلی توانی در زمان معادله دیفرانسیل سخت

$$\dot{u} = cu + f(u,t). \qquad (۱)$$

را در فاکتور انتگرال گیری e^{-ct} ضرب کرده و با انتگرالیری از t_n تا $t_{n+۱}$ به

(۲)

$$u(t_{n+۱}) = u(t_n)e^{ch} + e^{ch}\int_{۰}^{h} e^{-c\tau} f(u(t_{n+\tau}), t_{n+\tau})d\tau,$$

خواهیم رسید. این یک فرمول دقیق است و ماهیت روش تفاضلی توانی زمان از تقریب این انتگرال بدست می‌آید. به عنوان مثال می‌توان به روش‌های

روش $ETD۱$

$$u_{n+۱} = u_n e^{ch} + f_n(e^{ch} - ۱)/c,$$

روش$ETD۲$

$$u_{n+۱} = u_n e^{ch} + f_n((۱+hc)e^{ch} - ۱ - ۲hc)/hc^۲$$

$$+ f_{n-۱}(-e^{ch} + ۱ + hc)/hc^۲,$$

روش :$(ETD۳)$

$$u_{n+۱} = u_n e^{ch} + (((۲c^۲h^۲ + ۳ch + ۲)e^{ch}$$

$$-۶c^۲h^۲ - ۵ch - ۲)f_n + (-(۴ch + ۴)e^{ch}$$

$$+۶c^۲h^۲ + ۸ch + ۴)f_{n-۱} + ((ch + ۲)e^{ch}$$

$$-۲c^۲h^۲ - ۳ch - ۲)f_{n-۲})/(۲c^۳h^۲),$$

روش :$(ETD۴)$

$$u_{n+۱} = u_n e^{ch} + \Phi_۱ f_n - \Phi_۲ f_{n-۱} + \Phi_۳ f_{n-۲} - \Phi_۴ f_{n-۳},$$

$$\Phi_۱ = (۶c^۳h^۳ + ۱۱c^۲h^۲ + ۱۲ch + ۶)e^{ch}$$

$$-۲۴c^۳h^۳ - ۲۶c^۲h^۲ - ۱۸ch - ۶,$$

$$\Phi_۲ = (۱۸c^۲h^۲ + ۳۰ch + ۱۸)e^{ch}$$

$$-۳۶c^۳h^۳ - ۵۷c^۲h^۲ - ۴۸ch - ۱۸,$$

$$\Phi_۳ = (۶c^۲h^۲ + ۲۴ch + ۱۸)e^{ch} - ۲۴c^۳h^۳$$

$$-۴۲c^۲h^۲ - ۴۲ch - ۱۸,$$

$$\Phi_۴ = (۲c^۲h^۲ + ۶ch + ۶)e^{ch}$$

$$-۶c^۳h^۳ - ۱۱c^۲h^۲ - ۱۲ch - ۶,$$

اشاره کردکه از تقریب‌های مختلف اانتگرالده با چند جمله‌ایها با درجه مختلف محاسبه شده‌اند.

محاسبه ضرایبg_m

محاسبه ضرایب g_m در بسط ETD در محاسبات عددی دارای مشکل می‌باشند به عبارت دیگر محاسبه مستقیم آنها و یا محاسبه آنها از طریق بسط تیلور به مقدار واقعی همگرا نیست . برای$۱ \ll z$ روش پیشنهادی برای محاسبه دقیق وهمگرا، استفاده از فرمول انتگرال کوشی

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(T)}{T-z}dT,$$

که در آن Γ کانتوری بسته است که z را شامل می‌شود. در اینجا فرض آن است که $f(z)$ بر Γ و درون آن تحلیلی می‌باشد ساده ترین کانتورΓ را می‌توان دایره ای به شعاع R و به مرکز$z_۰$ در نظر گرفت :

$$\Gamma = \{T(\theta) = z_۰ + re^{i\theta} : ۰ \leq \theta \leq ۲\pi\},$$

بنابرتعریف انتگرال کانتور

$$\int_{\Gamma} H(T)dT = \int_{\theta} H(T(\theta))dT(\theta)d\theta,$$

تقریب

$$f_k(z) \approx \frac{۱}{N}\sum_{j=۱}^{N} f_k(T(\theta_j)),$$

را می‌توان محاسبه کرد .

روش‌های رانگ‌ـ کوتا برای روش تفاضلی توان در زمان

روش تفاضلی توانی در زمان از نوع چند مرحله ی است که نیاز به محاسبه قبلی عبارت غیر خطی f دارد واستفاده از این روش‌ها اغلب مشکل است، مزیت روش های چند مرحله خطای کوچک و ثابت ونواحی پایداری بزرگتر است در کنار این روش‌های چند مرحله ای روش‌های رانگ ـ کوتا از مزیت خاصی برخوردارند چرا که تک مرحله ای با درجه خطای یکسان با روش‌های چند مرحله‌ای می‌باشند. در این قسمت روش های تفاضلی توانی در زمان را برای رانگ کوتای مرتبه دو ،سه وچهار بد ست می‌آوریم
اگر

$$a_n = u_n e^{ch} + f_n(e^{ch} - ۱)/c,$$

در تقریب

$$f = f(u_n, t_n) + (t - t_n)(f(a_n, t_n + h) - f(u_n, t_n))/h + o(h^{۲}),$$

جایگزین رابطه

$$u_{n+۱} = a_n + (f(a_n, t_n + h) - f_n)(e^{ch} - ۱ - ch)/hc^{۲},$$

بدست آید. به این روش$(ETD۲RK)$ می‌گویند، به همین مراتب بالاتر نیز قابل استخراج می‌باشند اما از آنجا که محاسبات بسیار طولانی می‌باشد در اینجا فقط به ذکر روش‌ها قناعت می‌کنیم
روش $(ETD۳RK)$

$$a_n = u_n e^{ch/۲} + f_n(e^{ch/۲} - ۱)/c,$$

$$b_n = u_n e^{ch} + (e^{ch} - ۱)(۲f(a_n, t_n + h/۲) - f(u_n, t_n))/c,$$

$$u_{n+۱} = u_n e^{ch} + (f(u_n, t_n)[-۴ - hc + e^{ch}(-۴ - ۳hc + h^{۲}c^{۲})]$$
$$+ ۴f(a_n, t_n + h/۲)[۲ + hc + e^{ch}(-۲ + hc)]$$
$$+ f(b_n, t_n + h)[-۴ - ۳hc - h^{۲}c^{۲} + e^{ch}(۴ - hc)])/h^{۲}c^{۳}.$$

روش$(ETD۴RK)$

$$a_n = u_n e^{ch/۲} + (e^{ch/۲-۱})f(u_n, t_n)/c$$

$$b_n = u_n e^{ch/۲} + (e^{ch/۲-۱})f(a_n, t_n + h/۲)/c$$

$$c_n = a_n e^{ch/۲} + (e^{ch/۲} - ۱)$$
$$(۲f(b_n, t_n + h/۲) - f(u_n, t_n))/c,$$

$$u_{n+۱} = u_n e^{ch} + (f(u_n, t_n)$$
$$[-۴ - hc + e^{ch}(۴ - ۳hc + h^{۲}c^{۲})]$$
$$+۲(f(a_n, t_n + h/۲) + f(b_n, t_n + h/۲))$$
$$[۲ + hc + e^{ch} + (-۲ + hc)]$$
$$+f(c_n, t_n + h) - ۴ - ۳hc - h^{۲}c^{۲} + e^{ch}(۴ - hc)])/h^{۲}c^{۳},$$

تمام محاسبات بالا توسط نرم افزار میپل نیز انجام ونتایج بالا تائید شده‌اند.

روش فاکتور انتگرال گیری

روش فاکتور انتگرالگیری (IF) استاندارد برای (۱) از رابطه بدست می‌آید.

$$\frac{d}{dt}(ue^{-ct}) = e^{-ct}f(u, t), \qquad (۳)$$

با بکار بردن روش آدامز بشفورت مرتبه دو برای معادله (۳) به

$$u_{n+۱} = u_n e^{ch} - \frac{h}{۲}f_{n-۱}e^{۲ch} + \frac{۳h}{۲}f_n e^{ch},$$

$(IFAB۲)$ خواهیم رسید .که خطای برشی این روش به صورت زیر است

$$E = \frac{۵}{۱۲}\frac{d^{۲}}{dt^{۲}}(fe^{-ct}) \sim \frac{۵}{۱۲}h^{۳}c^{۲}f.$$

$$|c| \longrightarrow \infty$$

با بکار بردن رانگ‌ـ کوتای دوم (پیراسته اویلر) برای معادله (۳)

$$u_{n+۱} = u_n e^{ch} + \frac{h}{۲}(f_n e^{ch} + f((u_n + hf_n)e^{ch}, t_n + h)),$$

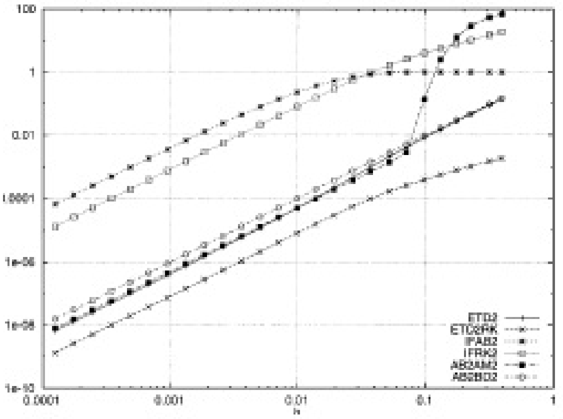
به $(IFRK۲)$ خواهیم رسید که خطای این روش از مرتبه خطای $(IFAB۲)$ است. اگرچه می‌توان از این

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

روش به طور متداول استفاده کرد ولی این روش نسبتا ضعیف است. در انتها به مقایسه روش‌های مختلف عددی ارائه شده در این مقاله و بعضی روش‌های دیگر برای معادله دیفرانسیل

$$\dot{u} = cu + \sin t \quad u(\circ) = u_\circ, \qquad (۴)$$

که با $c = -۱۰۰$ و $u_\circ = ۱$ با استفاده از بسته $expint$ در نرم افزار متلب می‌پردازیم این مقایسه در شکل (۱) خلاصه شده است.



شکل ۱:خطای روش‌های ارائه شده برای معادله بالا

مراجع

[1] S. M. Cox and P. C. Mathaws, *Exponential Time Differencing for stiff systems*, journal of Computational physics 176, 430-455, (2002).

[2] Z. Jackiewicz, *General linear methods for ordinary differential euqation*, willey newJersey, 2009.

[3] E. Harier and G. wanner ,*solveing ordinary differential equation,II:stiff and differential- algebraic problem*, springer, newyork, 1996.

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴-۷ شهریور ۱۳۹۳

بررسی روش های تفاضلی توان در زمان برای سیستم‌های مختلف

زینب موسوی نژاد ، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه ولی عصر رفسنجان،m91161009@post.vru.ac.ir

چکیده:
هدف از این تحقیق بررسی روش‌های عددی تفاضلی توان در زمان مختلف برای چندین دستگاه و بررسی مقدار خطای آنها می‌باشد از جمله این دستگاهها می‌توان به سیستم‌های معادله غیر خطی شرودینگر، معادله کوراموتو سیواشینسکی، معادله کی دی وی و سیستم ϕ^4 نامبرد. سیستم اخیر دارای خاصیت فرکتالی بوده و جواب دقیقتر با سرعت بالا اهمیت حیاتی در مشخص کردن خاصیت فرکتالی دارد.

کلمات کلیدی: معادله کی دی وی، معادله غیر خطی شرودینگر، معادله کوراموتو سیواشینسکی، سیستم ϕ^4

مقدمه

امروزه نقش معادلات دیفرانسیل در توصیف پدیده‌های مختلف در حوزه‌های مختلف بر کسی پوشیده نیست در این میان ، جواب این معادلات تلاش بسیاری از ریاضیدانان را بر انگیخته است. در غیاب جواب‌های تحلیلی، جواب‌های عددی نقش کلیدی در فهم دینامیک این گونه معادلات و در نتیجه فهم پدیدهای فیزیکی دارند. در بسیاری از موارد سرعت و دقت، فاکتور حیاتی در انتخاب روش عددی خواهد بود. اخیراً روش‌های تفاضلی توان در زمان برای حل عددی معادلات دیفرانسیل به صورت بسیار گسترده‌تر بسط و مورد استفاده قرار گرفته‌اند برای جزئیات بیشتر به مرجع [۲، ۱] رجوع شود. در این تحقیق به بررسی این روش بر روی چندین سیستم مختلف از جمله معادله غیر خطی شرودینگر ، معادله کی دی وی و سیستم ϕ^4 و مقایسه با سایر روش‌ها می‌پردازیم سرعت خروجی دو موج متقاطع سیستم ϕ^4دارای خاصیت فرکتالی می‌باشد که حل عددی معادله دیفرانسیل مربوطه را برای تعداد بسیاری از مقادیر سرعت ورودی می‌طلبد. بنا براین اهمیت این روش‌های عددی برای سیستم‌های مطروحه در این تحقیق بر نویسندگان این مقاله پوشیده نمی‌باشد.برای استخراج روش‌های تفاضلی توانی در زمان برای معادله دیفرانسیل سخت

$$\dot{u} = cu + f(u,t), \tag{۱}$$

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

را در فاکتور e^{-ct} ضرب کرده و سپس با انتگرالگیری از t_n تا $t_{n+۱}$ به

(۲)
$$u(t_{n+۱}) = u(t_n)e^{ch}+e^{ch}\int_{۰}^{h} e^{-c\tau}f(u(t_n+\tau), t_n+\tau)d\tau,$$

خواهیم رسید. اکنون با تقریب‌های مختلف از انتگرال در (۲) به روش‌های مختلف تفاضلی توان در زمان خواهیم رسید به‌عنوان مثال روش $(ETD۱)$ به‌صورت

$$u_{n+۱} = u_n e^{ch} + f_n(e^{ch} - ۱)/c,$$

و یا روش $(ETD۲)$ به‌صورت

$$u_{n+۱} = u_n e^{ch} + f_n((۱ + hc)e^{ch} - ۱ - ۲hc)/hc^۲$$

$$+f_{n-۱}(-e^{ch} + ۱ + hc)/hc^۲,$$

از تقریب‌های خطی مرتبه اول معادله (۲) حاصل می‌شوند. روش‌های آمیخته رانگ_ کوتا و روش تفاضلی توان در زمان به طور صریح در مرجع [۱] با عناوین: $ETD۱, ETD۲, ETD۳, ETD۲RK$ $ETD۳RK, ETD۴RK$ آورده شده است .

معادله غیر خطی شروینگر

معادله غیر خطی شرودینگر در بعد مکان به‌صورت

$$i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^۲ u(x,t)}{\partial x^۲} + (V(x) + |u(x,t)|^۲)u(x,t),$$

که $V(x)$یک تابع پتانسیل می‌باشد معرفی می‌شود. این معادله در بسیاری از شاخه‌های فیزیک شامل نظریه بسط چند مولفه ای و انتشار پالس‌های نور در فیبر کاربرد دارد. این معادله یکی از معادلات معروف به معادلات سولیتونی است که دارای بی‌نهایت مقدار پایاست از جمله این مقادیر می‌توان انرژی و حرکت را نامبرد. سولیتون برای معادلات دیفرانسیلی وجود دارد که تناسب بین قسمت‌های خطی و غیر خطی وجود داشته باشد زیرا قسمت‌های خطی حرکت سولیتون وقسمت‌های غیر خطی ثابت بودن شکل سولیتون را در پی خواهد داشت سولیتون موجی متمرکز است که معمولاً برای انتقال اطلاعات در درون یک فیبر استفاده می‌شود سولیتون همچنین دارای خاصیتی است که شکل وسرعت خود را پس از برخورد با سایر سولیتون‌ها حفظ می‌کند. در محاسبات عددی این بخش $V(x) \equiv ۰$ در نظرگرفته می‌شود. با استفاده از انتقال فوریه معادله NLS به صورت زیر

$$\frac{d\hat{u_k}(t)}{dt} = i(k^۲\hat{u_k}(t) - fft(|u(t)|^۲u(t))),$$

که برای محاسبات عددی استفاده می‌شود . شرط اولیه برای معادله به صورت

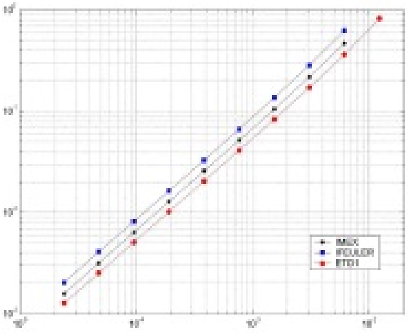
$$u(x,t) = a\sec h(b(x - vt)e^{i(c_۰x+dt)}, \qquad (۳)$$

در نظر می‌گیریم که مقادبر حقیقی

$$d = c_۰^۲ - b^۲, c_۰ = \frac{-۱}{۲}v, b = \frac{a}{\sqrt{۲}}$$

می‌باشند .این جواب کامل برای مقایسه با سایر روش‌های عددی مورد استفاده قرار می‌گیرد خطای روش‌های مختلف برای معادله (۳) در شکل (۱) خلاصه شده است

The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳



شکل ۱:خطای روش‌های مختلف عددی برای معادله غیر خطی شرودینگر

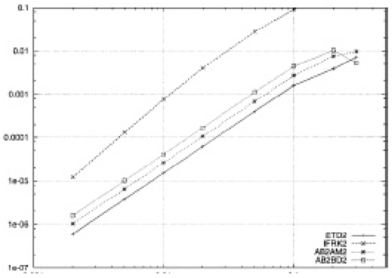
معادله کوراموتو_سیواشینسکی

در این بخش روش‌های تفاضلی توان در زمان را برای مدل

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-۲\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}-\frac{\partial^{۴}u}{\partial x^{۴}}-u\frac{\partial u}{\partial x}$$

که به معادله کوراموتو_سیواشینسکی معروف است بکار می‌بریم شرط مرزی را متناوب با دوره تناوب ۲π در نظر می‌گیریم جواب ابتدائی

$$u(x,۰)=۰/۰۳\sin x$$



شکل ۲: مقایسه خطای روش‌های مختلف عددی برای معادله کوراموتو_ سیواشینسکی

در نظر بگیریم این معادله داری جواب کامل نیست بنابراین جواب تقریبی را از روش شبه طیفی برای متغیر مکان و روش رانگ_کوتا مرتبه چهار برای متغیر زمان بدست می‌آوریم. لازم بذکر است که مشتق از مرتبه چهار سخت بودن معادله را نتیجه می‌دهد مقایسه روش‌های تفاضلی توان در زمان در شکل (۲) خلاصه شده است

معادله کی دی وی

در این بخش به معادله کورتووگ_دی وریس که به معادله کی دی وی معروف می‌باشد و به صورت

$$u_t+uu_x+u_{xxxx}=۰, \qquad (۴)$$

می‌باشد ،می‌پردازیم این معادله دارای جواب سولیتونی

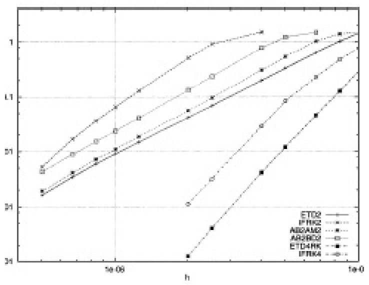
$$f=۳\sec h^{۲}(\sqrt{\frac{c}{۲}}(x-ct)),$$

می‌باشد که در آن c یک پارامتر آزاد می‌باشد، در اینجا جواب‌های عددی بدست آمده از روش‌های مختلف را با جواب‌های تحلیلی (۴) مقایسه و نتایج در شکل(۳) خلاصه شده است .در این شکل نیز مزیت روش‌های آمیخته رانگ_کوتای چهار در روش‌های تفاضلی توان در زمان به خوبی نمایان می‌باشد لازم بذکر است که

مقادیر خطای بعد از یک دوره کامل در زمان $t = \frac{۲\pi}{c}$ با $c = ۶۲۵$ و تعداد نقاط ۲۵۶ و با استفاده از فرمول خطای نسبی

$$(\sum (u_j - f_j)^{۲} / \sum f_j^{۲})^{\frac{۱}{۲}},$$

محاسبه شده اند.



شکل ۳:مقایسه خطای روش‌های مختلف عددی برای معادله کی دی وی

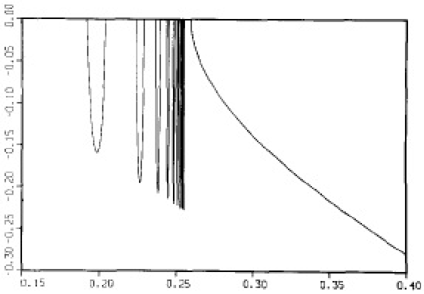
سیستم $\phi^۴$

سیستم $\phi^۴$ به صورت

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \phi + \phi^۳ = ۰ \qquad (۵)$$

می‌باشد. اخیراً خاصیت فراکتالی برای این معادله مقادیر سرعت خروجی دو موج متقاطع وابسته به سرعت تداخل، مورد مطالعه قرار گرفته است. همان طور که در شکل (۴) دیده می‌شود برای ترسیم نمودار بالا باید معادله (۵) برای مقادیر سرعت ورودی به صورت عددی حل شود که این خود نیاز به زمان بالا می‌باشد. با بکار بردن روش تفاضلی توان در زمان ، این زمان برای $\phi^۴$ به میزان بسیار زیادی کاسته می‌شود که به علت کمبود زمان و مکان مقایسه خطای این روش‌های و سایر روش‌ها برای این معادله در اینجا آورده نشده است.

نتایج این تحقیق بالا رجحان روش تفاضلی توان در زمان نسبت به سایر روش‌های عددی را نمایان می‌کند.



شکل ۴: مقایسه خطای روش‌های مختلف عددی برای سیستم $\phi^۴$

مراجع

[1] S. M. Cox and P. C. Mathaws, *Exponential Time Differencing for stiff systems*, Journal of Computational Physics 176, 430-455 (2002).

[2] H .Ashi, *Numerical Methods for Stiff Systems*, A phD thesis submitted to the University of Nottingham, June 2008.

[3] D. K Campbell, j. F Schonfeld and C. A. Wingate, *Resonance structure in kink-anatikink interactions in theory* ϕ^4 , Physica 9D, 1-32(1983).